This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3433 06909678 6

System

der

Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren

nach wissenschaftlichen Principien

ohne Benutzung compilatorischer Hülfsmittel

entworfen und ausgeführt

und

mit einer kurzgefaßten, aber gründlichen Anleitung

zum

Feldmessen und Nivelliren

versehen

von

Martin Gottlieb Grabow.

Mit sechs Figurentafeln.

Frankfurt am Main.
Joh. Christ. Hermannsche Buchhandlung.
G. F. Kettembeil.
1828.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Da ich zu vorliegender Schrift das Vertrauen hege sie werde im Stande seyn die wesentlichen Ansprüche ihres Titel vor jeder gewissenhaften und unbefangenen Kritik durch sich selbst zu rechtfertigen, so darf ich mich wohl aller Erörterungen in dieser Hinsicht enthalten, und die unpartheiische Würdigung dessen, was in diesen Blättern für die wissenschaftliche Begründung der geometrischen Construktionslehre, sowohl in absoluter als in relativer Beziehung, geleistet worden, Denen anheimstellen, welche mit den Forderungen der Wissenschaft vertraut sind, und den wahren Werth eines Buchs nicht nach der Vorrede, sondern nach dem Inhalte desselben beurtheilen.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abtheilung.

:zeugung geometrischer Figuren (§. 1 — §. 21).

Erster Abschnitt.

Construction gerader Linien und Kreise nach gegebenen Bedingungen (§ 1 — § 16).

1. Vermittelst eines Lineals und Zirkels zu zeichnen:
   1) beliebige gerade Linien und Winkel,
   2) beliebige Bogen, und Kreise.
2. Vermittelst eines Lineals, Zirkels, verjüngten Maßstabes und Transporteurs genau, oder näherungsweise darzustellen:
   1) jede Zahl in Form einer geraden Linie,
   2) jede gerade Linie in Form einer Zahl,
   3) die Summe oder Differenz gegebener Geraden in Form einer Geraden.
   4) jede Gradzahl in Form eines Winkels,
   5) jeden Winkel in Form einer Gradzahl,
   6) die Summe oder Differenz gegebener Winkel in Form eines Winkels.
3. Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, welche einander: 1) berühren, 2) schneiden, 3) weder berühren noch schneiden.
4. Durch einen Punkt einer Geraden eine zweite Gerade unter einem bestimmten Neigungswinkel gegen erstere zu ziehen. Der Neigungswinkel soll gleich sein:
   1) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
   2) einem verzeichneten beliebigen Winkel.
5. Durch zwei oder mehrere Punkte einer Geraden zwei oder mehrere Gerade, unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere zu ziehen.
6. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden eine zweite Gerade zu ziehen, und zwar:
   1) parallel gegen erstere,
   2) geneigt gegen dieselbe; und zwar soll der Neigungswinkel gleich sein:
      2′) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
      2″) einem verzeichneten beliebigen Winkel.

System

der

Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren

nach wissenschaftlichen Principien

ohne Benutzung compilatorischer Hülfsmittel

entworfen und ausgeführt

und

mit einer kurzgefaßten, aber gründlichen Anleitung

zum

Feldmessen und Nivelliren

versehen

von

Martin Gottlieb Grabow.

Mit sechs Figurentafeln.

Frankfurt am Main.
Joh. Christ. Hermannsche Buchhandlung.
G. F. Kettembeil.
1828.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Da ich zu vorliegender Schrift das Vertrauen hege sie werde im Stande seyn die wesentlichen Ansprüche ihres Titel vor jeder gewissenhaften und unbefangenen Kritik durch sich selbst zu rechtfertigen, so darf ich mich wohl aller Erörterungen in dieser Hinsicht enthalten, und die unpartheiische Würdigung dessen, was in diesen Blättern für die wissenschaftliche Begründung der geometrischen Constructionslehre, sowohl in absoluter als in relativer Beziehung, geleistet worden, Denen anheimstellen, welche mit den Forderungen der Wissenschaft vertraut sind, und den wahren Werth eines Buchs nicht nach der Vorrede, sondern nach dem Inhalte desselben beurtheilen.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abtheilung.

Erzeugung geometrischer Figuren (§. 1 — §. 21).

Erster Abschnitt.

Construction gerader Linien und Kreise nach gegebenen Bedingungen (§ 1 — § 16).

§. 1. Vermittelst eines Lineals und Zirkels zu zeichnen:
1) beliebige gerade Linien und Winkel,
2) beliebige Bogen, und Kreise.

§. 2. Vermittelst eines Lineals, Zirkels, verjüngten Maßstabes und Transporteurs genau, oder näherungsweise darzustellen:
1) jede Zahl in Form einer geraden Linie,
2) jede gerade Linie in Form einer Zahl,
3) die Summe oder Differenz gegebener Geraden in Form einer Geraden.
4) jede Gradzahl in Form eines Winkels,
5) jeden Winkel in Form einer Gradzahl,
6) die Summe oder Differenz gegebener Winkel in Form eines Winkels.

§. 3. Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, welche einander: 1) berühren, 2) schneiden, 3) weder berühren noch schneiden.

§. 4. Durch einen Punkt einer Geraden eine zweite Gerade unter einem bestimmten Neigungswinkel gegen erstere zu ziehen. Der Neigungswinkel soll gleich sein:
1) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
2) einem verzeichneten beliebigen Winkel.

§. 5. Durch zwei oder mehrere Punkte einer Geraden zwei oder mehrere Gerade, unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere zu ziehen.

§. 6. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden eine zweite Gerade zu ziehen, und zwar:
1) parallel gegen erstere,
2) geneigt gegen dieselbe; und zwar soll der Neigungswinkel gleich sein:
2′) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
2″) einem verzeichneten beliebigen Winkel.

§. 7. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer Geraden zwei oder mehrere Gerade unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere zu ziehen.

§. 8. Man soll halbiren:
1) eine gegebene Gerade,
2) einen gegebenen Winkel,
3) einen gegebenen Bogen.

§. 9. Aus einem Punkte außerhalb einer Geraden einen Kreis zu beschreiben, welcher die Gerade berührt.

§. 10. Ueber einem gegebenen Durchmesser einen Kreis zu beschreiben.

§. 11. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, für welche gegeben ist:
1) ein Berührungspunkt in der Peripherie,
2) ein Durchschnittspunkt außerhalb der Peripherie,
3) eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

§. 12. Durch einen Kreis eine Sehne von bestimmter Größe (jedoch nicht größer als der Durchmesser ist) zu legen, für welche gegeben:
1) ein Begrenzungspunkt in der Peripherie,
2) ein Richtungspunkt außerhalb der Peripherie,
3) ein Durchschnittspunkt innerhalb der Kreisfläche,
4) eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

§. 13. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, und zwar:
1) an zwei einander berührende Kreise,
2) an zwei einander schneidende Kreise,
3) an zwei einander weder berührende noch schneidende Kreise.

§. 14. Durch zwei außereinander liegende Kreise eine Gerade zu ziehen, so daß die von beiden Peripherien abgegrenzten Sehnen von bestimmter und zwar gleicher Größe werden.

§. 15. Construction proportionaler Linien nach analytischen Formeln.

§. 15. a. Vierte und dritte Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des ersten Grades zu construiren:

1) $ay = bc$; 2) $ay = b^2$.
3) $aey = bcd$; 4) $aegy = bcdf$.
5) $ay = bc \pm df$; 6) $acy = beg \pm dfh$.
7) $(ae \pm mn)\, y = bcd$; 8) $(ae \pm mn)\, y = bcd \pm fgh$.

§. 15. b. Mittlere Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des zweiten Grades zu construiren:

9) $y^2 = bc$; 10) $ay^2 = bcd$.
11) $y^2 = a^2 + b^2$; 12) $y^2 = a^2 + bc$.
13) $y^2 = a^2 + \frac{cbd}{e}$; 14) $y^2 = af + bc$.
15) $y^2 = a^2 - b^2$; 16) $y^2 = a^2 - bc$.
17) $y^2 = a^2 - \frac{bcd}{e}$; 18) $y^2 = af - bc$.

19) $y^2 = \frac{afg}{m} \mp \frac{bcd}{e}$; 20) $y^2 = a^2 + b^2 + c^2$ etc.

21) $y^2 = a^2 + b^2 - cd$ etc. ; 22) $y^2 \mp ay = bc$.

23) $y^2 \mp ay = -bc$; 24) $aby^2 \mp cdey = fghk$.

25) $aby^2 \mp cdey = -fghk$.

§. 16. a. Den Mittelpunkt und Halbmeſſer eines Kreiſes zu finden, zu deſſen Beſtimmung gegeben ſind:

1) zwei Punkte der Peripherie.

2) ein Punkt der Peripherie, und eine Gerade als Tangente. Der Punkt liege:

2′) in der Geraden ſelbſt.

2″) außerhalb der Geraden.

3) zwei nebeneinander liegende Gerade als Tangenten. Es ſeien:

3′) beide Gerade parallel gegeneinander.

3″) beide Gerade geneigt gegeneinander.

4) drei Punkte der Peripherie, folglich nicht in einer Geraden liegend.

5) zwei Punkte der Peripherie, und eine nicht zwiſchenliegende Gerade als Tangente. Beide Punkte ſeien gegeben:

5′) in gleichen Abſtänden von der Geraden,

5″) in ungleichen Abſtänden von der Geraden.

6) Zwei Gerade als Tangenten, und ein Zwiſchenpunkt als Punkt der Peripherie. Es ſeien:

6′) beide Gerade parallel gegen einander,

6″) beide Gerade geneigt gegeneinander.

7) drei Gerade als Tangenten, folglich zwei derſelben geneigt gegen die dritte.

8) eine Gerade als Sehne, nebſt einem zugehörigen Peripheriewinkel.

§. 16. b. Den Mittelpunkt und Halbmeſſer eines Kreiſes zu beſtimmen, welcher:

9) einen gegebenen Kreis berührt, und einen gegebenen Punkt ſcheidet. Es liege der Punkt:

9′) in der Peripherie des gegebenen Kreiſes.

9″) außerhalb der Peripherie des gegebenen Kreiſes.

10) einen gegebenen Kreis, und eine gegebene Gerade berührt. Es ſei die Gerade:

10′) eine Tangente des gegebenen Kreiſes.

10″) eine Sekante des gegebenen Kreiſes,

10‴) weder eine Tangente, noch eine Sekante des gegebenen Kreiſes.

11) zwei außereinander liegende Kreiſe berührt.

12) einen gegebenen Kreis berührt, und zwei gegebene Punkte ſchneidet. Es ſeien gegeben:

12′) ein Punkt in der Peripherie, der andere außerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

12″) ein Punkt in der Peripherie, der andere innerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

12′′′) beide Punkte außerhalb der Fläche des gegebenen Kreises.
12IV) beide Punkte innerhalb der Fläche des gegebenen Kreises.
13) zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Zwischenkreis berührt. Es seien:
13′) beide Gerade parallel gegeneinander.
13′′) beide Gerade geneigt gegeneinander.
14) einen gegebenen Kreis, nebst einer gegebenen Geraden berührt, und einen gegebenen Punkt schneidet. Es liege der Punkt:
14′) in der Peripherie des gegebenen Kreises.
14′′) in der gegebenen Geraden.
14′′′) weder in der Peripherie des Kreises, noch in der gegebenen Geraden.
15) zwei gegebene außereinanderliegende Kreise berührt, und einen gegebenen Punkt schneidet. Der Schneidungspunkt liege:
15′) in der Peripherie eines der gegebenen Kreise.
15′′) außerhalb der Flächen beider Kreise.
16) zwei gegebene außereinanderliegende Kreise, und eine gegebene Gerade berührt:
17) drei gegebene außereinanderliegende Kreise berührt; und zwar:
17′) alle drei von Aussen.
17′′) alle drei von Innen.
17′′′) zwei von Aussen, den dritten von Innen.
17IV) zwei von Innen, den dritten von Aussen.

Zweiter Abschnitt.

Construction geradlinig begrenzter Figuren nach gegebenen Bedingungen. (§. 17 — §. 21).

a) Construction eines Dreiecks nach drei gegebenen Bestimmungs-Elementen.

§. 17. Zur Verzeichnung eines Dreiecks sind gegeben:

1) drei Seiten.
2) zwei Seiten und ein Winkel.
   Zwei Fälle.
3) zwei Seiten, und eine Höhe.
   Zwei Fälle.
4) zwei Seiten, und der Halbmesser des Umkreises.
5) zwei Winkel, und eine Seite.
6) zwei Winkel, und eine Höhe.

7) zwei Winkel, und der Halbmeſſer des Umkreiſes.
8) zwei Höhen, und eine Seite.
Zwei Fälle.
9) zwei Höhen, und ein Winkel.
Zwei Fälle.
10) zwei Höhen, und der Halbmeſſer des Umkreiſes.
11) eine Seite, ein Winkel, und eine Höhe.
Vier Fälle.
12) eine Seite, ein Winkel, und der Halbmeſſer des Umkreiſes.
13) eine Seite, eine Höhe, und der Halbmeſſer des Umkreiſes.
Zwei Fälle.
14) ein Winkel, eine Höhe, und der Halbmeſſer des Umkreiſes.
Zwei Fälle.
15) die drei Höhen.

b) Conſtruction eines Vierecks nach gegebenen Beſtimmungs-Elementen.

α) Eines Parallelogramms nach drei Beſtimmungs-Elementen.

§. 18. Zur Verzeichnung eines Parallelogramms ſind gegeben:

1) zwei Seiten, und ein Winkel.
2) zwei Seiten, und eine Diagonale.
3) zwei Seiten, und ein Abſtandsperpendikel.
4) eine Seite, ein Winkel, und eine Diagonale.
Zwei Fälle.
5) eine Seite, ein Winkel, und ein Abſtandsperpendikel.
6) eine Seite, und die beiden Diagonalen.
7) eine Seite, eine Diagonale, und ein Abſtandsperpendikel.
Zwei Fälle.
8) eine Seite, und die beiden Abſtandsperpendikel.
9) ein Winkel, und die beiden Diagonalen.
10) ein Winkel, eine Diagonale, und ein Abſtandsperpendikel.
Vier Fälle.
11) ein Winkel, und die beiden Abſtandsperpendikel.
12) ein Abſtandsperpendikel, und die beiden Diagonalen.
13) eine Diagonale, und die beiden Abſtandsperpendikel.

β) Conſtruction eines Trapezes nach vier Beſtimmungs-Elementen.

§. 19. Zur Verzeichnung eines Trapezes ſind gegeben:

1) Die vier Seiten.
2) drei Seiten, und ein Winkel.
Drei Fälle.

3) drei Seiten, und eine Diagonale.
Zwei Fälle.
4) drei Seiten, und das Abſtandsperpendikel der Parallelen.
Zwei Fälle.
5) zwei Seiten, und zwei Winkel.
Zwei Fälle.
6) zwei Seiten, und die beiden Diagonalen.
Zwei Fälle.
7) zwei Seiten, ein Winkel, und eine Diagonale.
Vier Fälle.
8) zwei Seiten, das Abſtandsperpendikel der Parallelen, und ein Winkel.
Zwei Fälle.
9) zwei Seiten, das Abſtandsperpendikel der Parallelen, und eine Diagonale.
Drei Fälle.
10) eine Seite, zwei Winkel, und eine Diagonale.
Zwei Fälle.
11) eine Seite, zwei Winkel, und das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten.
12) eine Seite, die beiden Diagonalen, und ein Winkel.
Zwei Fälle.
13) eine Seite, die beide Diagonalen, und das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten.
Zwei Fälle.
14) eine Seite, eine Diagonale, das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten, und ein Winkel.
Zwei Fälle.
15) zwei Winkel, eine Diagonale, und das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten.
16) die beiden Diagonalen, ein Winkel, und das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten.

γ) Conſtruction eines Vierecks überhaupt nach fünf Beſtimmungs-Elementen.

§. 20. Zur Verzeichnung eines Vierecks ſind gegeben:
1) die vier Seiten, und ein Winkel.
2) drei Seiten, und ein Winkel.
Vier Fälle.
3) zwei Seiten, und drei Winkel.
Zwei Fälle.

c) Conſtruction eines Vielecks nach gegebenen Bedingungen.

§. 21. Zur Abtragung eines Vielecks ſind gegeben:
1) alle Seiten, und alle Winkel weniger drei.
Zwei Fälle.

2) alle Seiten weniger eine, und alle Winkel weniger zwei.
Sechs Fälle.
3) alle Seiten weniger zwei, und alle Winkel, weniger einen.
Zwei Fälle.
4) die Geraden, welche von einem beliebigen Punkt nach den Winkelspitzen der Figur gezogen sind, nebst den von denselben eingeschlossenen Winkeln.
5) Sämmtliche Perpendikel, welche aus den Winkelspitzen der Figur auf eine beliebige Standlinie gefällt worden, nebst den Abständen dieser Perpendikel auf der Standlinie.

Zweite Abtheilung.

Verwandlung geometrischer Figuren (§. 22 — §. 139).

Erster Abschnitt.

Verwandlung einer Figur in eine andere von gleichem Flächen-Inhalte (§. 22 — §. 139).

I. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur.

A) Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

a) Verwandlung eines N-ecks in ein N-eck.

α) Verwandlung eines Dreiecks in ein Dreieck nach gegebenen Bedingungen.

§. 22. Ein Dreieck in ein anderes, von gleichem Flächen-Inhalt, zu verwandeln, durch Quantitäts-Aenderung.
1) eines Winkels.
2) einer Seite.
3) einer Höhe.
4) eines Winkels, und einer Seite.
Zwei Fälle.
5) eines Winkels, und einer Höhe.
Zwei Fälle.
6) einer Seite, und einer Höhe.

Inhalts-Verzeichniß.

Erste Abtheilung.

Erzeugung geometrischer Figuren (§. 1 — §. 21).

Erster Abschnitt.

Construction gerader Linien und Kreise nach gegebenen Bedingungen (§ 1 — § 16).

§. 1. Vermittelst eines Lineals und Zirkels zu zeichnen:
1) beliebige gerade Linien und Winkel,
2) beliebige Bogen, und Kreise.

§. 2. Vermittelst eines Lineals, Zirkels, verjüngten Maßstabes und Transporteurs genau, oder näherungsweise darzustellen:
1) jede Zahl in Form einer geraden Linie,
2) jede gerade Linie in Form einer Zahl,
3) die Summe oder Differenz gegebener Geraden in Form einer Geraden.
4) jede Gradzahl in Form eines Winkels,
5) jeden Winkel in Form einer Gradzahl,
6) die Summe oder Differenz gegebener Winkel in Form eines Winkels.

§. 3. Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, welche einander: 1) berühren, 2) schneiden, 3) weder berühren noch schneiden.

§. 4. Durch einen Punkt einer Geraden eine zweite Gerade unter einem bestimmten Neigungswinkel gegen erstere zu ziehen. Der Neigungswinkel soll gleich sein:
1) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
2) einem verzeichneten beliebigen Winkel.

§. 5. Durch zwei oder mehrere Punkte einer Geraden zwei oder mehrere Gerade, unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere zu ziehen.

§. 6. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden eine zweite Gerade zu ziehen, und zwar:
1) parallel gegen erstere,
2) geneigt gegen dieselbe; und zwar soll der Neigungswinkel gleich sein:
2′) einem nicht verzeichneten rechten Winkel,
2″) einem verzeichneten beliebigen Winkel.

§. 7. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer Geraden zwei oder mehrere Gerade unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere zu ziehen.

§. 8. Man soll halbiren:
1) eine gegebene Gerade,
2) einen gegebenen Winkel,
3) einen gegebenen Bogen.

§. 9. Aus einem Punkte außerhalb einer Geraden einen Kreis zu beschreiben, welcher die Gerade berührt.

§. 10. Ueber einem gegebenen Durchmesser einen Kreis zu beschreiben.

§. 11. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, für welche gegeben ist:
1) ein Berührungspunkt in der Peripherie,
2) ein Durchschnittspunkt außerhalb der Peripherie,
3) eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

§. 12. Durch einen Kreis eine Sehne von bestimmter Größe (jedoch nicht größer als der Durchmesser ist) zu legen, für welche gegeben:
1) ein Begrenzungspunkt in der Peripherie,
2) ein Richtungspunkt außerhalb der Peripherie,
3) ein Durchschnittspunkt innerhalb der Kreisfläche,
4) eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

§. 13. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, und zwar:
1) an zwei einander berührende Kreise,
2) an zwei einander schneidende Kreise,
3) an zwei einander weder berührende noch schneidende Kreise.

§. 14. Durch zwei außereinander liegende Kreise eine Gerade zu ziehen, so daß die von beiden Peripherien abgegrenzten Sehnen von bestimmter und zwar gleicher Größe werden.

§. 15. Construction proportionaler Linien nach analytischen Formeln.

§. 15. a. Vierte und dritte Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des ersten Grades zu construiren:

1) $ay = bc$; 2) $ay = b^2$.
3) $aey = bcd$; 4) $aegy = bcdf$.
5) $ay = bc \pm df$; 6) $acy = beg \pm dfh$.
7) $(ae \pm mn)\, y = bcd$; 8) $(ae \pm mn)\, y = bcd \pm fgh$.

§. 15. b. Mittlere Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des zweiten Grades zu construiren:

9) $y^2 = bc$; 10) $ay^2 = bcd$.
11) $y^2 = a^2 + b^2$; 12) $y^2 = a^2 + bc$.
13) $y^2 = a^2 + \frac{cbd}{e}$; 14) $y^2 = af + bc$.
15) $y^2 = a^2 - b^2$; 16) $y^2 = a^2 - bc$.
17) $y^2 = a^2 - \frac{bcd}{e}$; 18) $y^2 = af - bc$.

19) $y^2 = \frac{afg}{m} \mp \frac{bcd}{e}$; 20) $y^2 = a^2 + b^2 + c^2$ etc.

21) $y^2 = a^2 + b^2 - cd$ etc. ; 22) $y^2 \mp ay = bc$.

23) $y^2 \mp ay = -bc$; 24) $aby^2 \mp cdey = fghk$.

25) $aby^2 \mp cdey = -fghk$.

§. 16. a. Den Mittelpunkt und Halbmeſſer eines Kreiſes zu finden, zu deſſen Beſtimmung gegeben ſind:

1) zwei Punkte der Peripherie.

2) ein Punkt der Peripherie, und eine Gerade als Tangente. Der Punkt liege:

2′) in der Geraden ſelbſt.

2″) außerhalb der Geraden.

3) zwei nebeneinander liegende Gerade als Tangenten. Es ſeien:

3′) beide Gerade parallel gegeneinander.

3″) beide Gerade geneigt gegeneinander.

4) drei Punkte der Peripherie, folglich nicht in einer Geraden liegend.

5) zwei Punkte der Peripherie, und eine nicht zwiſchenliegende Gerade als Tangente. Beide Punkte ſeien gegeben:

5′) in gleichen Abſtänden von der Geraden,

5″) in ungleichen Abſtänden von der Geraden.

6) Zwei Gerade als Tangenten, und ein Zwiſchenpunkt als Punkt der Peripherie. Es ſeien:

6′) beide Gerade parallel gegen einander,

6″) beide Gerade geneigt gegeneinander.

7) drei Gerade als Tangenten, folglich zwei derſelben geneigt gegen die dritte.

8) eine Gerade als Sehne, nebſt einem zugehörigen Peripheriewinkel.

§. 16. b. Den Mittelpunkt und Halbmeſſer eines Kreiſes zu beſtimmen, welcher:

9) einen gegebenen Kreis berührt, und einen gegebenen Punkt ſcheidet. Es liege der Punkt:

9′) in der Peripherie des gegebenen Kreiſes.

9″) außerhalb der Peripherie des gegebenen Kreiſes.

10) einen gegebenen Kreis, und eine gegebene Gerade berührt. Es ſei die Gerade:

10′) eine Tangente des gegebenen Kreiſes.

10″) eine Sekante des gegebenen Kreiſes,

10‴) weder eine Tangente, noch eine Sekante des gegebenen Kreiſes.

11) zwei außereinander liegende Kreiſe berührt.

12) einen gegebenen Kreis berührt, und zwei gegebene Punkte ſchneidet. Es ſeien gegeben:

12′) ein Punkt in der Peripherie, der andere außerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

12″) ein Punkt in der Peripherie, der andere innerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

b) In einen Kreisring.

§. 94. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweise in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 95. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweise in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 96. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren näherungsweise in Form eines Kreisringes darzustellen.

C) In eine gemischtlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In einen Kreisausschnitt.

§. 97. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 98. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 99. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren, näherungsweise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

b) In einen Kreisabschnitt.

§. 100. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 101. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 102. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

II. Verwandlung zweier oder mehrerer krummlinig begrenzter Figuren in Eine.

A) In eine krummlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In einen Kreis.

§. 103. Die Summe gegebener Kreise in Form eines Kreises darzustellen.

§. 104. Die Differenz gegebener Kreise in Form eines Kreises darzustellen.

§. 105. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe in Form eines Kreises darzustellen.

§. 106. Die Summe oder Differenz eines gegebenen Kreises und Kreisringes in Form eines Kreises darzustellen.

b) In einen Kreisring.

§. 107. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 108. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 109. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe in Form eines Kreisringes darzustellen.

B) In eine geradlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In ein Quadrat.

§. 110. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

§. 111. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

§. 112. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

b) In ein N-eck von bestimmter Form.

§. 113. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

§. 114. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

§. 115. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

C) In eine gemischtlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In einen Kreisausschnitt.

§. 116. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 117. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 118. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

b) In einen Kreisabschnitt.

§. 119. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 120. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 121. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

III. Verwandlung zweier oder mehrerer gemischtlinig begrenzter Figuren in Eine.

A) In eine krummlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In einen Kreis.

§. 122. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte in Form eines Kreises darzustellen.

§. 123. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Kreises darzustellen.

§. 124. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreises darzustellen.

b) In einen Kreisring.

§. 125. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 126. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Kreisringes darzustellen.

§. 127. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreisringes darzustellen.

B) In eine geradlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In ein Quadrat.

§. 128. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

§. 129. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

§. 130. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

b) In ein N-eck von bestimmter Form.

§. 131. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

§. 132. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

§. 133. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

C) In eine gemischtlinig von bestimmter Form.

a) In einen Kreisausschnitt.

§. 134. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 135. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

§. 136. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreisausschnitts darzustellen.

b) In einen Kreisabschnitt.

§. 137. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 138. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

§. 139. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreisabschnitts darzustellen.

Dritte Abtheilung.

Theilung geometrischer Figuren (§. 140 — §. 176).

Erster Abschnitt.

Theilung gerader Linien und geradlinig begrenzter Figuren. (§. 140 — §. 168.)

NB. Die Erklärung der in den Auflösungen gebrauchten Bezeichnung siehe auf dem Anfangsblatt einer jeden Unterabtheilung.

I. Theilung gerader Linien nach bestimmten Verhältnissen.

§. 140. Jede Gerade in n Theile nach einfachen Verhältnissen zu theilen.
§. 141. Jede Gerade in n Theile nach quadratischen Verhältnissen zu theilen.
§. 142. Jede Gerade in n Theile nach Wurzelverhältnissen zu theilen.
§. 143. Jede Gerade ins: »äußere und mittlere Verhältniß,« zu theilen.

II. Theilung geradlinig begrenzter Figuren nach bestimmten Verhältnissen, und zwar:

1) nach einfachen, 2) nach quadratischen, 3) nach Wurzelverhältnissen.

a) Sämmtliche Theilungslinien sollen sich in einem Punkte schneiden, welcher gegeben ist:

α) In einer Winkelspitze des N-ecks.

§. 144. Jedes Dreieck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 145. Jedes N-eck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

β) In einer Seite des N-ecks.

§. 146. Jedes Dreieck, vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 147. Jedes N-eck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

γ) Innerhalb der N-ecksfläche.

§. 148. Jedes Dreieck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 149. Jedes N-eck, vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

δ) Außerhalb der N-ecksfläche.

§. 150. Jedes Dreieck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 151. Jedes Viereck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 152. Jedes Vieleck vorstehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

b) Sämmtliche Theilungslinien ſollen durch je zwei Seiten des N-ecks begrenzt werden, und ſtetig auf einander folgen (Zickzacktheilung).

α) der Anfangspunkt der erſten Theilungslinie liegt in einer Winkelſpitze des N-ecks.

§. 153. Jedes Dreieck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 154. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

β) der Anfangspunkt der erſten Theilungslinie liegt in einer Seite des N-ecks.

§. 155. Jedes Dreieck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 156. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

γ) der Anfangspunkt der erſten Theilungslinie liegt außerhalb der N-ecksfläche.

§. 157. Jedes Dreieck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 158. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

c) Sämmtliche Theilungslinien ſollen durch je zwei Seiten des N-ecks begrenzt werden, und einer gegebenen Richtungslinie parallel ſein. (Paralleltheilung).

α) Die gegebene Richtungslinie ſei eine Seite des N-ecks.

§. 159. Jedes Dreieck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 160. Jedes Viereck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 161. Jedes Vieleck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

β) die gegebene Richtungslinie ſei keine Seite des N-ecks, ſondern eine beliebige Gerade.

§. 162. Jedes Dreieck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 163. Jedes Viereck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.
§. 164. Jedes Vieleck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

d) Sämmtliche Theilungslinien ſollen den N-ecksſeiten parallel ſein, und dergeſtalt um einen gegebenen Punkt liegen, daß ſie von den Geraden, welche jenen Punkt mit den Winkelſpitzen des N-ecks verbinden, begrenzt werden. (Aehnlichkeitstheilung).

α) der gegebene Punkt liegt in einer Winkelſpitze des N-ecks.

§. 165. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

β) der gegebene Punkt liegt in einer Seite des N-ecks.

§. 166. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

γ) der gegebene Punkt liegt im Innern des N-ecks.

§. 167. Jedes N-eck vorſtehender Bedingung gemäß in n Theile zu theilen.

Zweiter Abschnitt.

Kreistheilungen mit Rücksicht auf die Construction regulärer N-ecke. (§. 168 — §. 176).

NB. Die Erklärung der in den Auslösungen gebrauchten Bezeichnung siehe auf dem Anfangsblatt einer jeden Unterabtheilung.

I. Peripherie- und Bogen-Theilungen gegebener Kreise.

A) Peripherie-Theilungen mit Rücksicht auf die Construction regulärer N-ecke.

§. 168. Jeden Kreisumfang zu theilen.
1) In 3 gleiche Theile.
2) In 6, 12 überhaupt in 3. 2^n gleiche Theile.
3) In 4 gleiche Theile.
4) In 8, 16 überhaupt in 4. 2^n gleiche Theile.
5) In 5 und 10 gleiche Theile.
6) In 20, 40 überhaupt in 10. 2^n gleiche Theile.
7) In 15 gleiche Theile.
8) In 30, 60 überhaupt in 15. 2^n gleiche Theile.
9) In n gleiche Theile.
10) In n Theile, die sich zu einander verhalten $p' : p'' : p''' :$ etc.

§. 169. Zu einer gegebenen Geraden, als Seite eines regulären N-ecks, den Halbmesser des dazu gehörigen Umkreises zu bestimmen.

B) Bogen-Theilungen.

§. 170. Jeden Kreisbogen zu theilen:
1) In 2^n gleiche Theile.
2) In n gleiche Theile.
3) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

II. Flächen- und Flächenstück-Theilungen gegebener Kreise.

A) Theilung gegebener Kreisflächen.

a) durch Halbmesser.

§. 171. Jede Kreisfläche, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen.
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

b) durch concentrische Kreise.

§. 172. Jede Kreisfläche, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

B. Theilung gegebener Kreisringe.

a) durch Halbmesser.

§. 173. Jeden Kreisring, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen.
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander erhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

b) durch concentrische Kreise.

§. 174. Jeden Kreisring, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

C) Theilung gegebener Kreisausschnitte.

a) durch Halbmesser.

§. 175. Jeden Kreisausschnitt, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

b) durch concentrische Bogen.

§. 176. Jeden Kreisausschnitt, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen.
1) In n gleiche Theile.
2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Anhang.

Betreffend die Grundlehren, und Hauptoperationen der niedern Feldmeßkunst.

Einleitung (§. 177 — §. 187).

§. 177. Ueber die Form, und Größe des Erdkörpers nach Andeutungen.

§. 178. Begriffsbestimmungen der Ausdrücke: — verticale Linien, und Flächen — horizontale Linien, und Flächen — wahrer oder sphärischer, und scheinbarer oder ebener Horizont eines Erdenortes — horizontale, und verticale Projectionen beliebiger Punkte, und Figuren der Erdoberfläche — Folgerungen.

§. 179. Definition der Geodäsie, oder Erdmeßkunst — Charten.

§. 180. Eintheilung der Geodäsie in höhere, und niedere, oder in Land-, und Feldmeßkunst — der Charten in geographische, und topographische; in Grundrisse, und Profilrisse — Grenzen der Feldmeßkunst.

181. Ueber die Anwendung landesgebräuchlicher Maßsysteme in der Feldmessung — Abhängigkeit eines jeden Maßsystems von seiner gesetzlich bestimmten Längen-Einheit.

182. Preußische, und Französische Maßsysteme, nach der Duodecimal-, und Decimal-Eintheilung — Vergleichung beider — verschiedene Verwandlungsaufgaben.

183. Maßverjüngungen zur Verzeichnung topographischer Grund-, und Profilrisse — gesetzliche Bestimmungen in dieser Rücksicht von Seiten der Preuß. Regierung — verschiedene Aufgaben.

184. Gradmaße zum Behufe der Winkelmessung nach der alten (sexagesimalen), und neuen (centesimalen) Kreiseintheilung — Vergleichung beider — verschiedene Verwandlungsaufgaben — Winkelbestimmungen durch Längenmessungen nach verschiedenen Methoden.

185. Werkzeuge, Geräthschaften, und sonstige Hülfsmittel zur Feldvermessung — 1) Signale. 2) Meßfahnen. 3) Absteckstäbe. 4) Zeichenstäbe. 5) Plöcke — 6) Das Bleiloth. 7) Die Setzwage. 8) Die Libelle, die lange, und die dosenförmige. 9) Die Kanalwage. 10) Die Quecksilberwage. 11) Die Sissonsche, die Reichenbachsche Wasserwage. — 12) Maßstäbe. 13) Meßkette. 14) Meßschnur. 15) Nivellirlatten und Zielscheiben. 16) Schall. 17) Schritte, und Augenmaß. — 18) Das Winkelkreuz. 19) Die Bouſſole. 20) Das Astrolabium. 21) Der Meßtisch, nebst Zubehör.

186. Werkzeuge und Materialien zur Verzeichnung, und Illuminirung topographischer Risse, nebst Andeutungen über die Darstellungsweise mehrerer Feldgegenstände nach Form und Färbung.

187. Zusammenstellung derjenigen trigonometrischen Dreiecksformeln, welche am häufigsten bei Feldvermessungen gebraucht werden.

Erster Abschnitt.

Horizontale Projectionsbestimmungen (§. 188 — §. 203).

A) Beliebiger Linien, und Winkel des Feldes. (§. 188 — §. 194).

188. Postul. Mündliche Belehrung über die wesentlichen Verfahrungsarten und Vorsichtsmaßregeln bei Absteckung und Messung gerader Linien, und Winkel des Feldes.

189. Aufg. Auf einem Punkte o einer geraden Ortslinie $\alpha\beta$ eine Senkrechte zu errichten. — Aufl. 1. 2.

190. Aufg. Aus einem Punkte o, außerhalb einer geraden Ortslinie $\alpha\beta$, eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

1) Wie die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich, und sichtbar ist. — Aufl. 1. 2. 3. 4. 5.
2) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich, aber nicht sichtbar ist. — Aufl. 6. 7.
3) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus unzugänglich, aber sichtbar ist. — Aufl. 8.

§. 191. Aufg. Durch einen Punkt o eine gerade Ortslinie zu legen, parallel einer gegebenen $\alpha\beta$.
1) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich, und sichtbar ist. — Aufl. 1. 2. 3. 4.
2) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich, aber nicht sichtbar ist. — Aufl. 5. 6. 7.
3) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus unzugänglich, aber sichthar ist. — Aufl. 8.

§. 192. Aufg. Die wegen mancherlei Hindernisse nicht unmittelbar auszumessende horizontale Entfernung $\alpha\beta$ zweier Ortspunkte durch mittelbare Messungen zu bestimmen.
1) Wenn von beiden Ortspunkten α, β nach gewissen Seitenpunkten hin gerade Linien abgesteckt und gemessen werden können. — Aufl. 1. 2. 3. 4.
2) Wenn nur von einem Ortspunkte α, und einem Zwischen-, oder Verlängerungs-Punkte $\varkappa$ der $\alpha\beta$ nach gewissen Seitenpunkten hin gerade Linien abgesteckt und gemessen werden können, der andere Ortspunkt β aber von diesen Seitenpunkten aus sichtbar ist. — Aufl. 5. 6. 7. 8.
3) Wenn beide Ortspunkte unzugänglich, aber von gewissen Seitenpunkten aus sichtbar sind — Aufl. 9. 10. 11. 12.

§. 193. Aufg. Krumme oder gemischte Ortslinien des Feldes, von unregelmäßiger Form, wie Grenzen, Wege, Flußufer, ꝛc. durch mittelbare Messung zu bestimmen. — Aufl. 1. 2. 3.

§. 194. Aufg. Ortswinkel, deren Scheitelpunkte die Aufstellung eines Winkelmessers nicht gestatten, durch mittelbare Messung zu bestimmen (zu centriren). — Aufl. 1. 2.

B) Beliebiger Flächen des Feldes (§. 195 — §. 203).

a) Form-Bestimmung derselben.

§. 195. Aufg. Die horizontale Projection eines beliebigen Ortsdreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch unmittelbare oder mittelbare Messung zu bestimmen, je nachdem das Eine oder das Andere ausführbar ist.
1) Wenn sämmtliche Seiten und Winkel des Dreiecks zugänglich und meßbar sind. — Aufl. 1. 2.
2) Wenn nur zwei Seiten des Dreiecks und deren Zwischenwinkel meßbar sind. — Aufl. 3. 4. 5.

3) Wenn nur eine Seite des Dreiecks und die derselben anliegenden Winkel meßbar sind. — Aufl. 6. 7. 8.
4) Wenn nur ein Winkel des Dreiecks zugänglich und meßbar ist. — Aufl. 9. 10. 11. 12.
5) Wenn weder die Seiten noch die Winkel des Dreiecks zugänglich und meßbar sind. — Aufl. 13. 14. 15. 16.

§. 196. Aufg. Die horizontale Projection eines beliebigen Ortsvierecks nach verschiedenen Messungsmethoden vermittelst der obigen Instrumente zu bestimmen.
a) Nach der Umfangs-Methode — wenn gemessen werden:
1) Die vier Seiten des Vierecks und ein Winkel am Umfange desselben — Aufl. 1. 1′; 2, 2′.
2) Drei Seiten des Vierecks und zwei Winkel am Umfange desselben — Aufl. 3. 3′; 4, 4′; 5. 5′; 6. 6′; 7. 7′; 8. 8′.
3) Zwei Seiten des Vierecks und drei Winkel am Umfange desselben — Aufl. 9. 9′; 10. 10′; 11. 11′; 12. 12′.
4) Eine Seite des Vierecks und vier Winkel am Umfange desselben — Aufl. 13. 13′; 14. 14′;
b) Nach der Einpunkts-Methode — Aufl. 15.
c) Nach der Coordinaten-Methode — Aufl. 16.
d) Nach der Standlinien-Methode — Aufl. 17.
e) Nach der Triangulirungs-Methode — Aufl. 18.

§. 197. Aufg. Ueber die Anwendung der vorstehenden Vermessungs-, Berechnungs-, und Verzeichungs-Methoden zur horizontalen Projectionsbestimmung beliebiger Erdflächenstücke — wie Wiesen-, Feld-, und Waldbezirke; Flußgebiete, Wegerstreckungen; Dorf-, und Stadt-Anlagen, nebst deren Gemarkungen.

b) Inhalts-Bestimmung derselben.

§. 198. Aufg. Den Flächen-Inhalt eines Felddreiecks zu bestimmen. — Mehrere Aufl.
§. 199. Aufg. Den Flächen-Inhalt eines Feldpolygons zu bestimmen.
a) Nach der Dreiecks-Methode. — Aufl. 1.
b) Nach der Trapez-Methode. — Aufl. 2.
c) Nach der Coordinaten-Methode. — Aufl. 3.
§. 200. Aufg. Den Flächen-Inhalt einer krumm-, oder gemischtlinnig begrenzten Feldfigur zu bestimmen.
a) Nach der Polygon-Methode. — Aufl. 1.
b) Nach der Abwägungs-Methode. — Aufl. 2.

c) Theilung derselben nach bestimmten Verhältnissen.

§. 201. Aufg. Jedes Felddreieck, nach bestimmter Lage der Theilungslinien, in n Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten wie p′ : p″ : p‴ : etc. Aufl. Nach zwölf Lagverschiedenheiten der Theilungslinien.

§. 202. Aufg. Jedes Feldpolygon nach bestimmter Lage der Theilungslinien in n Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc. Aufl. Nach zwölf Lagverschiedenheiten der Theilungslinien.

§. 203. Aufg. Anwendung der vorstehenden Theilungs-Methoden auf verhältnißgemäße Theilungen krumm- und gemischtlinnig begrenzter Feldfiguren.

Zweiter Abschnitt.

Verticale Projectionsbestimmungen (§. 204 — §. 209.)

A) Absoluter Höhen (§. 204. §. 205).

§. 204. Postulat. Mündliche Belehrung über die verticale Projectionsbestimmung beliebiger Winkel des Feldes.

§. 205. Aufg. Die absolute Höhe eines erhabenen Gegenstandes durch mittelbare Messung zu bestimmen.

I. Wenn die Standlinie in einer verticalen Ebene der zu bestimmenden Höhe liegt. — Aufl. 1 — 7.

II. Wenn die Standlinie nicht in einer verticalen Ebene der zu bestimmenden Höhe liegt. — Aufl. 8 — 11.

B) Relativer Höhen (§. 206 — §. 209).

§. 206. Erklärung der Ausdrücke: scheinbares Gefäll, wahres Gefäll, ꝛc.

§. 207. Aufg. Das wahre Gefäll zwischen einem Ortspunkt α und einem in seinem scheinbaren Horizonte liegenden Punkte β zu bestimmen.

§. 208. Aufg. Das wahre Gefäll zweier zugänglicher Ortspunkte vermittelst der Nivellirungswerkzeuge zu bestimmen.

1) Wenn die beiden Punkte aus einem mittleren Punkte ihrer horizontalen Entfernung sichtbar sind. — Aufl. 1.

2) Wenn die beiden Punkte aus keinem mittleren Punkte ihrer horizontalen Entfernung zugleich sichtbar sind. — Aufl. 2.

§. 209. Aufg. Die wahre Entfernung zweier Punkte von beliebiger Lage vermittelst des Schall's zu bestimmen.

Tabelle. A. — Vergleichung verschiedener Fußlängen.

Tabelle. B. — Vergleichung verschiedener Meilenlängen.

Tabelle. C. — Vergleichung verschiedener größerer Feldflächenmaße.

Tabelle. D. — Vergleichung verschiedener Fruchtmaße.

Tabelle. E. — Vergleichung verschiedener Flüssigkeitsmaße.

Nachweiſung der §§. zu welchen die einzelnen Figuren gehören.

Fig. 1. zu §. 4.
Fig. 2. zu §. 4. 2.
Fig. 3. Fig. 4. zu §. 6. 2'.
Fig. 5. zu §. 8. 1.
Fig. 6. zu §. 8. 2.
Fig. 7. zu §. 11. 1.
Fig. 8. zu §. 13. 2.
Fig. 9. Fig. 10. zu §. 15. 1.
Fig. 11. Fig. 12. zu §. 15. 9.
Fig. 13. zu §. 15. 12. 22.
Fig. 14. zu §. 15. 16. 23.
Fig. 15. zu §. 15. 22.
Fig. 16. zu §. 15. 23.
Fig. 17. zu §. 16. 5'.
Fig. 18. zu §. 16. 6''.
Fig. 19. zu §. 16. 10''.
Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. zu §. 16. 12''.
Fig. 23. Fig. 24. zu §. 16. 12IV.
Fig. 25. zu §. 16. 13''.
Fig. 26. zu §. 16. 14'.
Fig. 27. zu §. 16. 14''.
Fig. 28. zu §. 16. 14'''.
Fig. 29. zu §. 16. 15'.
Fig. 30. zu §. 16. 15''.
Fig. 31. zu §. 16. 16.
Fig. 32. zu §. 16. 17'.
Fig. 33. zu §. 16. 17''.
Fig. 34. zu §. 16. 17'''.
Fig. 35. zu §. 16. 17IV.
Fig. 36. zu §. 17. 13.
Fig. 37. zu §. 17. 7.
Fig. 38. zu §. 17. 9'.
Fig. 39. zu §. 17. 11'''. 14'.
Fig. 40. zu §. 17. 11IV. 14''.
Fig. 41. zu §. 18. 6. 12.
Fig. 42. zu §. 18. 7''. 8.
Fig. 43. zu §. 18. 9.
Fig. 44. zu §. 18. 10. 11.
Fig. 45. Fig. 46. zu §. 19.
Fig. 47. zu §. 19. 6'.
Fig. 48. zu §. 20.
Fig. 49. zu §. 21.
Fig. 50. zu §. 22. 1. 2.
Fig. 51. zu §. 22. 2.
Fig. 52. Fig. 53. zu §. 22. 3.
Fig. 54. zu §. 22. 4''.
Fig. 55. Fig. 56. zu §. 22. 5'.
Fig. 57. zu §. 24. 2'. 2''. 7''. 8'.
Fig. 58. zu §. 24. 4. 5'''.
Fig. 59. zu §. 24. 7'''. 9''. 11''. 11IV. 12'. 12''. 14''.
Fig. 60. zu §. 24. 9'.
Fig. 61. zu §. 24. 9'.
Fig. 62. zu §. 25.
Fig. 63. zu §. 26. §. 28. §. 32.
Fig. 64. Fig. 65. zu §. 30.
Fig. 66. zu §. 31.
Fig. 67. zu §. 37.
Fig. 68. zu §. 38.
Fig. 69. zu §. 40. 1.
Fig. 70. zu §. 48.
Fig. 71. zu §. 140.
Fig. 72. zu §. 141.
Fig. 73. zu §. 141. 1.
Fig. 74. Fig. 75. zu §. 145. 1.
Fig. 76. Fig. 77. zu §. 146. 1.
Fig. 78. Fig. 79. zu §. 147. 1.
Fig. 80. Fig. 81. zu §. 148. 1.

Fig. 82. Fig. 83. Fig. 84. zu §. 150. 1.
Fig. 85. zu §. 151. 1. Fall 1. a.
Fig. 86. zu §. 151. 1. Fall 1. b.
Fig. 87. zu §. 151. 1. Fall 2.
Fig. 88. zu §. 152. 1.
Fig. 89. zu §. 159. 1.
Fig. 90. zu §. 159. 1.
Fig. 91. zu §. 160. 1. a.
Fig. 92. zu §. 160. 1. b.
Fig. 93. Fig. 94. zu §. 160. 1. b. Fall 1.
Fig. 95. zu §. 160. 1. b. Fall 2.
Fig. 96. zu §. 160. 1. c.
Fig. 97. zu §. 161. 1.
Fig. 98. zu §. 162. 1.
Fig. 99. zu §. 163. 1.
Fig. 100 zu §. 164. 1.
Fig. 101. zu §. 165. 1.
Fig. 102. zu §. 168. 1.
Fig. 103. zu §. 168. 3.
Fig. 104. zu §. 168. 5.
Fig. 105. zu §. 168. 7.
Fig. 106. zu §. 172. 1.
Fig. 107. zu §. 174. 1.
Fig. 108. zu §. 184. 3.
Fig. 109. zu §. 186. D.
Fig. 110. zu §. 186. D.
Fig. 111. zu §. 189. Aufl. 1. 2.
Fig. 112. zu §. 190. Aufl. 1—7; §. 191. Aufl. 1—7.
Fig. 113. zu §. 190. Aufl. 8; §. 191. Aufl. 8; §. 192. Aufl. 10.
Fig. 114. zu §. 192. Aufl. 1—4; §. 195. Aufl. 1—5.
Fig. 115. zu §. 192. Aufl. 5. 7. 8; §. 195. Aufl. 6. 7. 8.
Fig. 116. zu §. 192. Aufl. 6.
Fig. 117. zu §. 192. Aufl. 9; §. 195. Aufl. 9.
Fig. 118. zu §. 192. Aufl. 10; §. 195. Aufl. 10.
Fig. 119. zu §. 192. Aufl. 10.
Fig. 120. zu §. 192. Aufl. 10.
Fig. 121. zu §. 192. Aufl. 11. 12; §. 195. Aufl. 11. 12.
Fig. 122. zu §. 193. Aufl. 1.
Fig. 123. zu §. 193. Aufl. 2.
Fig. 124. zu §. 194. Aufl. 1. 2.
Fig. 125. zu §. 195. Aufl. 13. 14.
Fig. 126. zu §. 195. Aufl. 15. 16.
Fig. 127. zu §. 196.
Fig. 128. zu §. 199. Aufl. 2.
Fig. 129. zu §. 199. Aufl. 3.
Fig. 130. zu §. 205. Aufl. 1. 2. 3.
Fig. 131. zu §. 205 Aufl. 4. 5.
Fig. 132. zu §. 205. Aufl. 6. 7.
Fig. 133. zu §. 205. Aufl. 8.
Fig. 134. zu §. 205. Aufl. 9.
Fig. 135. zu §. 205. Aufl. 10.
Fig. 136 zu §. 205. Aufl. 11.
Fig. 137. zu §. 207.
Fig. 138. zu §. 208.

Erste Abtheilung.

Erzeugung geometrischer Figuren.

NB.

Eine wohlgeordnete Sammlung von Instrumenten zur Verzeichnung geometrischer Figuren heißt Reißzeug. Zu den nothwendigsten Instrumenten desselben gehören:

1) Ein Lineal.
2) Zwei Handzirkel.
3) Zwei Reißfedern.
4) Ein rechtwinkeliges Dreieck.
5) Ein verjüngter Maßstab.
6) Ein Transporteur.

Vorläufige Bemerkungen über Zweckbestimmung, Prüfung und Anwendung dieser Instrumente bleiben der mündlichen Belehrung überlassen.

A. Conſtruction gerader Linien und Kreiſe nach gegebenen Bedingungen.

1. Poſtulat: Vermittelſt eines Lineals und Zirkels zu zeichnen:
1) Beliebige gerade Linien und Winkel.
2) Beliebige Bogen und Kreiſe.
2. Poſtulat: Vermittelſt eines Lineals, Zirkels, verjüngten Maßſtabes und Transporteurs genau, oder näherungsweiſe darzuſtellen:
1) Jede Zahl in Form einer geraden Linie.
2) Jede gerade Linie in Form einer Zahl.
3) Die Summe oder Differenz gegebener Geraden in Form einer Geraden.
4) Jede Gradzahl in Form eines Winkels.
5) Jeden Winkel in Form einer Gradzahl.
6) Die Summe oder Differenz gegebener Winkel in Form eines Winkels.
3. Poſtulat: Aus zwei gegebenen Punkten zwei Kreiſe zu beſchreiben, welche einander
1) berühren, 2) ſchneiden, 3) weder berühren noch ſchneiden.
4. Aufg. (Fig. 1. Fig. 2.). Durch einen Punkt o einer Geraden $\alpha\beta$ eine zweite Gerade $o\delta$ ſo zu legen, daß der Neigungswinkel $\delta o\beta$ gleich werde:
1) Einem nicht verzeichneten rechten Winkel.

Aufl. 1. (Fig. 1). Mache auf $\alpha\beta$ das Stück $o\varepsilon = o\eta$, ſchlage aus ε und η, mit gleicher Eröffnung des Zirkels, Bogen, welche einander in γ ſchneiden (§. 3.), und ziehe durch o und γ die $o\delta$, welche der Bedingung entſpricht.

Bew. folgt leicht, wenn die Geraden $\varepsilon\gamma$, $\eta\gamma$ gezogen werden, aus der Congruenz der Dreiecke $\varepsilon o\gamma$, $\eta o\gamma$.

Aufl. 2. Vermittelſt des Transporteurs oder des rechtwinkeligen Dreiecks — leicht.

2) Einem verzeichneten beliebigen Winkel φ.

Aufl. 1. (Fig. 2). Beschreibe aus o und dem Scheitel des Winkels φ, mit gleicher Eröffnung des Zirkels, zwei Kreise, deren ersterer die Gerade $\alpha\beta$ in ε, η, letzterer die Winkelschenkel in $\varkappa$, λ schneidet; mache den Bogen $\eta\vartheta$ gleich dem Zwischenbogen $\varkappa\lambda$ und ziehe durch o und ϑ die Gerade $o\delta$, welche unter dem Winkel φ gegen $\alpha\beta$ geneigt ist.

Bew. ergiebt sich, wenn die Geraden $\eta\vartheta$, $\varkappa\lambda$ gezogen werden, aus der Congruenz der Dreiecke $\eta o\vartheta$, $\varkappa\varphi\lambda$.

Aufl. 2. Vermittelst des Transporteurs — leicht.

§. 5. Aufg. Durch zwei oder mehrere Punkte einer Geraden zwei oder mehrere Gerade, unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere, zu ziehen.

Aufl. Nach §. 4.

§. 6. Aufg. (Fig. 3. Fig. 4). Durch einen Punkt o außerhalb einer Geraden $\alpha\beta$ eine zweite Gerade $o\delta$ zu ziehen, und zwar

1) parallel gegen $\alpha\beta$.

Aufl. 1. Ziehe durch o eine Gerade von beliebiger Neigung gegen $\alpha\beta$, wodurch dann die fernere Ausführung der Construction — mit Beachtung der Sätze über Gegen- und Wechselwinkel an Parallel-Linien — auf §. 4. 2. zurückgeführt ist.

Aufl. 2. Vermittelst des hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks — leicht.

2) Geneigt gegen $\alpha\beta$, und zwar soll der Neigungswinkel gleich seyn:

2') einem nicht verzeichneten rechten Winkel.

Aufl. 1. (Fig. 3). Schlage aus o einen Kreis, der die $\alpha\beta$ in zwei Punkten ε, η schneidet; aus letzteren, mit gleicher Eröffnung des Zirkels, zwei Kreise, einander schneidend in γ. Ziehe durch o und γ die Gerade $o\delta$, so wird diese der Forderung genügen.

Bew. Ziehe die Geraden $c\varepsilon$, $o\eta$, $\gamma\varepsilon$, $\gamma\eta$, und beweise die Congruenz

1) der Dreiecke $o\varepsilon\gamma$, $o\eta\gamma$;

2) der Dreiecke $\gamma\varepsilon\delta$, $\gamma\eta\delta$, woraus dann das Uebrige folgt.

Aufl. 2. (Fig. 4). Schlage aus zwei beliebig gewählten Punkten μ, ν der $\alpha\beta$, mit den Halbmessern $o\mu$, $o\nu$, zwei Kreise, welche einander in o und γ schneiden. Ziehe durch o und γ die Gerade $o\delta$, so wird diese auf $\alpha\beta$ senkrecht zu stehen kommen.

Bew. Verbinde die Punkte μ, ν mit γ, o durch Gerade, und beweise die Congruenz

1) der Dreiecke $o\mu\nu$, $\gamma\mu\nu$;

2) der Dreiecke $o\delta\mu$, $\gamma\delta\mu$;

woraus dann leicht die Richtigkeit der Construction erhellt.

Aufl. 3. Vermittelst des hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks — leicht.

2″) Einem verzeichneten beliebigen Winkel ϕ.

Aufl. Ziehe durch o eine Gerade, parallel gegen $\alpha\beta$ (§. 6. 1.), lege an diese Parallele die gesuchte Gerade od unter dem Neigungswinkel ϕ (§. 4. 2.), wodurch — bekannten Sätzen der Geometrie zufolge — offenbar der Forderung Genüge geschieht.

§. 7. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer Geraden zwei oder mehrere Gerade, unter bestimmten Neigungswinkeln gegen erstere, zu ziehen.

Aufl. Nach §. 6.

§. 8. Aufg. Man soll halbiren (hälften):

1) Eine gegebene Gerade $\alpha\beta$.

Aufl. (Fig. 5). Schlage aus α und β, mit gleicher Eröffnung des Zirkels, zwei Kreise, welche einander in zwei Punkten γ, δ schneiden (§. 3.), und ziehe die Verbindungslinie $\gamma\delta$ dieser Punkte, wodurch $\alpha\beta$ in o rechtwinkelig halbirt wird.

Bew. Ziehe die Geraden $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung durch Anwendung des Satzes: »daß sich in jedem gleichseitigen Parallelogramm die Diagonalen rechtwinkelig halbiren.« Was muß also zuvörderst bewiesen werden?

2) Einen gegebenen Winkel ϕ.

Aufl. 1. (Fig. 6). Schneide vom Scheitel aus gleiche Schenkelstücke ab, $\phi\delta = \phi\varepsilon$; schlage aus den Endpunkten δ, ε derselben zwei Bogen, welche einander in einem Punkte γ schneiden; verbinde diesen Durchschnittspunkt mit dem Scheitel des Winkels durch eine Gerade $\phi\gamma$, so wird diese der Forderung Genüge leisten.

Bew. Ziehe die Geraden $\delta\gamma$, $\varepsilon\gamma$ und beweise die Congruenz der Dreiecke $\phi\delta\gamma$, $\phi\varepsilon\gamma$.

Aufl. 2. Mittelst des Transporteurs — leicht.

3) Einen gegebenen Bogen b.

Aufl. Nach welchem Satze der Kreislehre läßt sich die Lösung der Aufgabe durch rechtwinkelige Halbirung der Bogensehne bewerkstelligen?

§. 9. Aufg. Aus einem Punkte außerhalb einer Geraden einen Kreis zu beschreiben, welcher die Gerade berührt.

Aufl. Nach §. 6. 2′, weßhalb?

§. 10. Aufg. Ueber einem gegebenen Durchmesser den zugehörigen Kreis zu beschreiben.

Aufl. Nach §. 8. 1. und §. 1.

§. 11. Aufg. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, für welche gegeben ist:

1) Ein Berührungspunkt o in der Peripherie.

Aufl. 1. Ziehe durch o einen Halbmesser, verlängere denselben, und wende §. 4. 1. an.

Aufl. 2. (Fig. 7). Mache $ov = o\mu$, ziehe durch v eine Gerade μx, so daß $xv = v\mu$ wird, und verbinde o mit x durch die Gerade ox, welche der Forderung entsprechen wird.

Bew. Zeige daß der Winkel μox ein Peripheriewinkel im Halbkreise, folglich ein rechter sey.

2) Ein Durchschnittspunkt o außerhalb der Peripherie.

Aufl. Verbinde o mit dem Mittelpunkt des Kreises durch eine Gerade, betrachte diese als Durchmesser, und schlage darüber einen Kreis (§. 10.), welcher den gegebenen in zwei Punkten dergestalt schneidet, daß die Geraden, welche von o nach diesen Punkten gezogen werden, der Forderung genügen.

Bew. Analog dem unter 1. Aufl. 2.

3) Eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

Aufl. Ziehe nach §. 6. 2', oder, wenn die Gerade ein Durchmesser wäre, nach §. 4. 1. einen Halbmesser senkrecht gegen die Gerade, und bringe, weil dadurch ein Berührungspunkt gefunden ist, §. 11. 1. in Anwendung.

§. 12. Aufg. Durch einen Kreis eine Sehne von bestimmter aber möglicher Größe zu legen, für welche gegeben ist:

1) Ein Begrenzungspunkt o in der Peripherie.

Aufl. Leicht.

2) Ein Richtungspunkt o außerhalb der Peripherie.

Aufl. Schlage aus dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Abstandsperpendikel der nach §. 12. 1. eingezeichneten Sehne einen Kreis (§. 9.), und wende §. 11. 2. an.

Bew. folgt aus dem Satze: »zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Abstände vom Mittelpunkt, und umgekehrt.«

3) Ein Durchschnittspunkt o innerhalb der Peripherie.

Aufl. und Bew. analog denen unter 2. Diese Aufgabe kann unmöglich werden. Wie läßt sich die Bedingung für die Möglichkeit vermittelst der Sehnenlänge = m, des Abstandsperpendikels = p, des

Kreishalbmessers = r, und der Entfernung des Punktes o vom Mittelpunkt = e analytisch, durch Anwendung des Pythag. Satzes, ausdrücken?

4) Eine Gerade von beliebiger Lage als parallele Richtungslinie.

Aufl. Beschreibe nach §. 9. vom Mittelpunkt des Kreises, mit dem Abstandsperpendikel der nach §. 12. 1. eingezeichneten Sehne, einen Kreis, ziehe einen senkrechten Halbmesser auf die Gerade (§. 6. 2' oder §. 4. 1.), und bringe §. 11. 3. in Anwendung.

Bew. Wie unter 2.

§. 13. Aufg. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, und zwar

1) an zwei einander berührende Kreise.

Aufl. Leicht.

2) An zwei einander schneidende Kreise.

Aufl. (Fig. 8). Die Halbmesser der um α und β verzeichneten Kreise mögen durch a und b ausgedrückt werden. Beschreibe über der Centrale $\alpha\beta$ einen Halbkreis (§. 10.), trage vom Mittelpunkt des größern Kreises eine Sehne in denselben, gleich der Differenz der Halbmesser, $\alpha\gamma = a - b$; ziehe durch γ den Halbmesser $\alpha\mu$ und durch β den Halbmesser $\beta\nu \pm \alpha\mu$, so bilden μ und ν die Berührungspunkte der verlangten Tangente.

Bew. Wird $\beta\gamma$ gezogen, so läßt sich leicht darthun, daß sowohl der Winkel $\alpha\mu\nu$ als auch $\beta\nu\mu$ ein rechter, folglich die Gerade $\mu\nu$ eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise sey.

Weßhalb bedarf es keines Halbkreises über der Centrale, wenn beide Kreise gleich groß sind?

3) An zwei einander weder berührende, noch schneidende Kreise.

Aufl. Verfahren und Beweis wie unter 2. und zwar

erstens ohne Abänderung, wenn die Berührungspunkte μ und ν auf derselben Seite der Centrale liegen sollen.

zweitens mit der Abänderung, daß die in den Halbkreis getragene Sehne $\alpha\gamma$ nicht der Differenz, sondern der Summe beider Halbmesser gleich genommen werden muß, im Fall die Berührungspunkte μ und ν auf verschiedene Seiten der Centrale fallen sollen.

§. 14. Aufg. Durch zwei außer einander liegende Kreise eine Gerade zu ziehen, so daß die von beiden Peripherien abgegrenzten Sehnen eine bestimmte, und zwar gleiche Größe erhalten.

Aufl. Nach §. 12. 1., sodann Kreise nach §. 9., und an diese eine gemeinschaftliche Tangente nach §. 13.

§. 15. Aufg. Construction proportionaler Linien nach analytischen Formeln.

NB. In nachstehenden Formeln sollen durch a, b, c, d ꝛc. gegebene, durch y gesuchte gerade Linien bezeichnet werden.

§. 15ª. Aufg. Vierte und dritte Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des ersten Grades zu construiren:

1) $ay = bc$, oder $a : \begin{vmatrix} b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \\ b \end{vmatrix} : y$, oder $y = \frac{bc}{a}$.

Aufl. 1. (Fig. 9). Zeichne zwei Gerade, einander schneidend in Punkte o, mache $o\alpha = a$, $o\beta = o\beta' = b$, $o\gamma = c$. Zeichne $\alpha\gamma$, und aus β oder β' die $\beta x = \beta' x' \mp \alpha\gamma$, so ist $ox = ox' = y$.

Bew. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $\alpha o\gamma$, βox, $\beta' ox'$, und der Congruenz der letztgenannten.

Aufl. 2. (Fig. 10). Zeichne zwei Gerade, einander schneidend im Punkte o, mache $o\alpha = a$, $o\gamma = c$, und $\alpha\beta$ oder $\alpha\beta' = b$ (jenachdem $b <$ oder $> a$ ist), ziehe $\alpha\gamma$, und parallel mit dieser die βx, $\beta' x'$, so wird im ersten Fall γx, im zweiten $\gamma x' = y$.

Bew. Ziehe $x\varepsilon \mp o\alpha$, so folgt die Richtigkeit der Construction aus den ähnlichen Dreiecken $\alpha o\gamma$, $\varepsilon x\gamma$, $\beta' ox'$.

2) $ay = b^2$, oder $a : b = b : y$, oder $y = \frac{bb}{a}$.

Aufl. (Fig. 9. 10). Verfahren und Bew. wie unter 1., wo $o\gamma = b$ gesetzt werden muß.

3) $aey = bcd$, oder $y = \frac{bc}{a} \cdot \frac{d}{e}$.

Aufl. Constr. 1) $\frac{bc}{a} = f$, 2) $\frac{fd}{e} = y$ nach 1.

4) $aegy = bcdf$, oder $y = \frac{bc}{a} \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{f}{g}$.

Aufl. Constr. 1) $\frac{be}{a} = k$; 2) $\frac{dk}{e} = l$; 3) $\frac{fl}{g} = y$ nach 1.

5) $ay = bc \pm df$, oder $y = \frac{bc}{a} \pm \frac{df}{a}$ (1), oder $y = \frac{b}{a}\left(c \pm \frac{df}{b}\right)$ (2).

Aufl. 1. Constr. 1) $\frac{bc}{a} = k$; 2) $\frac{df}{a} = l$ nach 1.; 3) $k \pm l = y$ nach §. 2.

Aufl. 2. Constr. 1) $c \pm \frac{df}{b} = m$, 2) $\frac{bm}{a} = y$ nach 1.

6) $aey = bcg \pm dfh$, oder $y = \frac{bc}{a} \cdot \frac{g}{e} \pm \frac{df}{a} \cdot \frac{h}{e}$ (1)., oder

$$y = \frac{b}{a}\left(\frac{cg}{e} \pm \frac{dfh}{bc}\right) \text{ (2).}$$

Aufl. Nach 3. und 5.

7) $(ae \pm mn)y = bcd$, oder $y = \frac{bcd}{(e \pm \frac{mn}{a})a}$.

Aufl. Nach 3. und 5.

8) $(ae \pm mn)y = bcd \pm fgh$, oder $y = \frac{bc\left(d \pm \frac{fgh}{bc}\right)}{a\left(e \pm \frac{mn}{a}\right)}$.

Aufl. Nach 3. und 5.

NB. Auf ähnliche Weiſe werden alle Bruchformen von einer poſitiven Dimenſion conſtruirt.

15ᵇ. Aufg. Mittlere Proportionallinien nach folgenden linearen Gleichungsformen des zweiten Grades zu conſtruiren.

9) $y^2 = ab$, oder $y = \sqrt{ab}$.

Aufl. 1. (Fig. 11). Beſchreibe über $\alpha\beta = \alpha o + o\beta = a + b$ einen Halbkreis (§. 10), errichte in o das Perpendikel ox, welches gleich y iſt. Wäre $a = b$, ſo würde $ox = y = a = b$.

Bew. folgt aus einem bekannten Satze der Kreislehre.

Aufl. 2. (Fig. 12). Es ſey $a > b$. Zeichne $o\alpha = a$, meſſe darauf $o\beta = b$ ab, ſchlage über $o\alpha$ einen Halbkreis, errichte in β das Perpendikel βx, und ziehe ox, welche $= y$ iſt.

Bew. Aus einem bekannten Satze der Kreislehre.

10) $ay^2 = bcd$, oder $y = \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot d}$.

Aufl. Conſtr. 1) $\frac{bc}{a} = k$ nach 1.; 2) $\sqrt{kd} = y$ nach 9.

11) $y^2 = a^2 + b^2$, oder $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ (1)., oder $y = \sqrt{a\left(a + \frac{b^2}{a}\right)}$ (2).

Aufl. 1. Mache a und b zu Schenkeln eines rechten Winkels (§. 4. 1.), die Verbindungslinie der Endpunkte iſt dem geſuchten y gleich, wie dies aus dem Pythag. Lehrſatz erhellt.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $a + \frac{bb}{a} = k$ nach 2.; 2) $\sqrt{ak} = y$ nach 9.

12) $y^2 = a^2 + bc$, oder $y = \sqrt{a^2 + bc}$ (1), oder $y = \sqrt{a\left(a + \frac{bc}{a}\right)}$ (2).

Aufl. 1. Conſtr. 1) $bc = k^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{a^2 + k^2} = y$., nach 11.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $a+\frac{bc}{a}=l$ nach 1.; 2) $\sqrt{al}=y$ nach 9.

Aufl. 3. (Fig. 13). Zeichne $\alpha\acute{\alpha}=2a$, errichte in den Endpunkten α, α' die nach entgegengeſetzten Seiten geſtreckten Perpendikel $\alpha\beta=b$, $\acute{\alpha}\gamma=c$; ziehe die Gerade $\beta\gamma$, halbire ſie in x, und ſchlage aus x mit $x\beta=x\gamma$ einen Kreis, welcher die verlängerte $\alpha\acute{\alpha}$ in den Punkten x, x' ſchneidet; fälle aus x das Perpendikel xo auf $\alpha\acute{\alpha}$, ſo iſt $ox=ox'=y$.

Bew. Rückverlängere das größere Perpendikel bis an die Peripherie — hier $\beta\alpha$ bis γ' — und verbinde den Einſchnittspunkt γ' mit dem Endpunkt γ des kleinern Perpendikels durch eine Gerade $\gamma\gamma'$. Verbinde x mit α, $\acute{\alpha}$, x, x' durch Gerade, und verlängere das Perpendikel xo bis o' in $\gamma\gamma'$, ſo ergiebt ſich die Richtigkeit der obigen Behauptung aus folgenden Betrachtungen:

1) Der Winkel $\beta\gamma'\gamma$ iſt ein rechter, folglich das Viereck $\alpha\acute{\alpha}\gamma\gamma'$ ein Rechteck, alſo
$$\gamma\gamma'=2a,\ \alpha\gamma'=\acute{\alpha}\gamma=c,\text{ und }\beta\gamma'=b+c.$$
2) $\gamma\gamma'$ iſt als Sehne durch das verlängerte Perpendikel xo in o', alſo auch $\alpha\acute{\alpha}'$ in o halbirt, daher $o\alpha=o\acute{\alpha}'=a$.
3) Wegen Congruenz der Dreiecke $xo\alpha$, $xo\acute{\alpha}$ iſt $x\alpha=x\acute{\alpha}'$.
4) Es iſt $xo'=\frac{1}{2}\beta\gamma'=\frac{1}{2}(b+c)$; $xo=xo'-oo'=\frac{1}{2}(b-c)$.
$$x\alpha=x\acute{\alpha}'=\sqrt{(o\alpha)^2+(ox)^2}=\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}(b-c)^2}.$$
$$xx=xx'=x\beta=x\gamma=\sqrt{(o'\gamma)^2+(o'x)^2}=\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}(b+c)^2},$$
alſo $xx=xx'>x\alpha=x\acute{\alpha}'$, d. h. der Kreis ſchneidet die $\alpha\acute{\alpha}'$ in der Verlängerung.
5) Aus der Congruenz der Dreiecke xox, xox' folgt, mit Rückſicht auf 4) nach dem Pythag. Lehrſatz:
$$ox=ox'=\sqrt{(xx)^2-(xo)^2}=\pm\sqrt{a^2+bc}=y\text{ w. z. b. w.}$$
NB. Der Punkt x fällt in o, wenn $b=c$ iſt, woraus hervorgeht, daß die eben ausgeführte Conſtruction auch der Formel 11. Genüge leiſtet.

Als Folgerung ergeben ſich noch nachſtehende Werthe:

(1) $\alpha x=\alpha o+ox=a+\sqrt{a^2+bc}$.
(2) $\alpha x'=\alpha o-ox'=a-\sqrt{a^2+bc}$.
(3) $\alpha' x=-\alpha o+ox=-a+\sqrt{a^2+bc}$.
(4) $\alpha' x'=-\alpha' o-ox'=+a-\sqrt{a^2+bc}$.

13) $y^2=a^2+\frac{bcd}{e}$, od. $y=\sqrt{a^2+\frac{bcd}{e}}$ (1)., od. $y=\sqrt{a\left(a+\frac{bcd}{ae}\right)}$ (2).

Aufl. 1. Conſtr. 1) $\frac{bcd}{e} = k^2$ nach 10.; 2) $\sqrt{a^2 + k^2} = y$ nach 11.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $\frac{cd}{e} = m$ nach 1.; 2) $\sqrt{a^2 + bm} = y$ nach 12.

Aufl. 3. Conſtr. 1) $a + \frac{bcd}{ae} = n$ nach 3.; 2) $\sqrt{an} = y$ nach 9.

14) $y^2 = af + bc$, oder $y = \sqrt{af + bc}$ (1)., oder $y = \sqrt{a\left(f + \frac{bc}{a}\right)}$ (2).

Aufl. 1. Conſtr. 1) $af = k^2$; $bc = l^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{k^2 + l^2} = y$ nach 11.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $af = k^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{k^2 + bc}$ nach 12.

Aufl. 3. Conſtr. 1) $f + \frac{bc}{a} = m$ nach 1.; 2) $\sqrt{am} = y$ nach 9.

15) $y^2 = a^2 - b^2$ (1), oder $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ (1)., oder $y = \sqrt{(a+b)(a-b)}$ (2).

NB. y wird unmöglich, wenn $b > a$ iſt.

Aufl. 1. Zeichne nach §. 4. 1. einen rechten Winkel, mache einen der Schenkel $= b$, und ſchlage aus dem Endpunkt des b mit a einen Bogen, der den andern Schenkel ſchneidet, verbinde dieſen Schneidungspunkt mit dem Endpunkt des b durch eine Gerade, ſo iſt dieſe $= y$, wie leicht aus dem Pythag. Lehrſatz erhellt.

Aufl. 2. Nach 9.

16) $y^2 = a^2 - bc$, oder $y = \sqrt{a^2 - bc}$ (1)., oder $y = \sqrt{\left(a - \frac{bc}{a}\right)a}$ (2).

NB. y wird unmöglich, wenn $bc > a^2$ iſt.

Aufl. 1) Conſtr. 1) $bc = k^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{a^2 - k^2} = y$ nach 15.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $a - \frac{bc}{a} = m$ nach 1.; 2) $\sqrt{am} = y$ nach 9.

Aufl. 3. (Fig. 14). Zeichne $\alpha\alpha' = 2a$; errichte in den Endpunkten α, α' die nach derſelben Seite zugeſtreckten Perpendikel $\alpha\beta = b$, $\alpha'\gamma = c$; ziehe $\beta\gamma$, halbire ſie in $\varkappa$, und ſchlage aus $\varkappa$ mit $\varkappa\beta = \varkappa\gamma$ einen Kreis, welcher die $\alpha\alpha'$ in den Punkten x, x' ſchneidet. Fälle aus $\varkappa$ auf $\alpha\alpha'$ das Perpendikel $\varkappa o$, ſo iſt $ox = ox' = y$.

Bew. Verbinde in dem Trapez $\alpha\alpha'\beta\gamma$ den Punkt $\varkappa$ mit α, α', x, x' durch Gerade, ſo ergeben ſich leicht folgende Wahrheiten:

1) Es iſt $\varkappa\beta = \varkappa\gamma$ und $\varkappa o \mp \alpha\beta \mp \alpha'\gamma$, folglich $o\alpha = o\alpha'$, und $\varkappa o = \frac{1}{2}(b + c)$

2) Es iſt $\beta\gamma = \sqrt{(\alpha\alpha')^2 + (\alpha\beta - \alpha'\gamma)^2} = \sqrt{4a^2 + (b-c)^2}$, folglich $\varkappa\beta = \varkappa\gamma = \varkappa x = \varkappa x' = \frac{1}{2}\beta\gamma = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2}$.

3) Wegen Congruenz der Dreiecke $\varkappa o\alpha$, $\varkappa o\alpha'$ iſt nach dem Pythag. Lehrſatz:

$\alpha x = \alpha x' = \sqrt{(\alpha o)^2 + (xo)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}(b+c)^2}$, alſo
$\alpha x = \alpha x' > xx = xx'$, d. h. der Kreis ſchneidet die $\alpha\alpha'$ in Zwiſchenpunkten.

4) Endlich folgt aus der Congruenz der Dreiecke xox, xox' mit Anwendung des Pythag. Lehrſatzes und Rückſicht auf 3.:

$ox = ox' = \sqrt{(xx)^2 - (xo)^2} = \sqrt{a^2 - bc} = y$ w. z. b. w.

NB. Vorſtehende Conſtruction iſt auch auf Formel 15. anwendbar. Wäre $bc = a^2$, ſo würden x und x' in o zuſammenfallen, alſo der Kreis die Gerade $\alpha\alpha'$ berühren, und $y = o$ ſeyn.

Als Folgerung ergeben ſich hier noch:

(1) $\alpha x = \alpha o + ox = +a + \sqrt{a^2 - bc}$.

(2) $\alpha x' = \alpha o - ox' = +a - \sqrt{a^2 - bc}$.

(3) $\alpha' x = -\alpha' o + ox = -a + \sqrt{a^2 - bc}$.

(4) $\alpha' x' = -\alpha' o - ox' = -a - \sqrt{a^2 - bc}$.

17) $y^2 = a^2 - \frac{bcd}{e}$, oder $y = \sqrt{a^2 - \frac{bcd}{e}}$ (1)., od. $y = \sqrt{a\left(a - \frac{bcd}{ae}\right)}$ (2).

NB. y wird unmöglich, wenn $\frac{bcd}{e} > a^2$ iſt.

Aufl. 1. Conſtr. 1) $\frac{bcd}{e} = k^2$ nach 10.; 2) $\sqrt{a^2 - k^2} = y$ nach 15.

Aufl. 2. Conſtr. 1) $\frac{cd}{e} = m$ nach 1.; 2) $\sqrt{a^2 - bm} = y$ nach 16.

Aufl. 3. Conſtr. 1) $a - \frac{bcd}{e} = n$ nach 1.; 2) $\sqrt{an} = y$ nach 9.

18) $y^2 = af - bc$, oder $y = \sqrt{af - bc}$ (1)., od. $y = \sqrt{a\left(f - \frac{bc}{a}\right)}$ nach 9.

Aufl. 1. Conſtr. 1) $af = k^2$, $bc = l^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{k^2 - l^2} = y$ nach 15

Aufl. 2. Conſtr. 1) $af = k^2$ nach 9.; 2) $\sqrt{k^2 - bc}$ nach 16.

Aufl. 3. Conſtr. 1. $f - \frac{bc}{a} = m$ nach 1.; 2) $\sqrt{am} = y$ nach 9.

19) $y^2 = \frac{afg}{m} \pm \frac{bcd}{e}$, oder $y = \sqrt{\frac{afg}{m} \pm \frac{bcd}{e}}$.

Aufl. Nach 10., 11. oder 15. ꝛc.

20) $y^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ꝛc. oder $y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Aufl. Conſtr. 1) $b^2 + c^2 = d^2$; 2) $\sqrt{a^2 + d^2} = y$ nach 11.

21) $y^2 = a^2 + b^2 - cd$ ꝛc. oder $y = \sqrt{a^2 + b^2 - cd}$.

NB. y wird unmöglich, wenn $cd > a^2 + b^2$ iſt.

Aufl. Conſtr. 1) $a^2 + b^2 = k^2$ nach 11.; 2) $\sqrt{k^2 - cd} = y$ nach 1.

22) $y^2 \mp ay = bc$, oder $y = \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.

Aufl. 1. (Fig. 13). Die unter 12. Aufl. 3. ausgeführte Construction, nur mit der Abänderung, daß $\alpha\alpha' = a$ zu setzen ist, wodurch die unter 12. aufgestellten Folgerungen nachstehende Werthe erhalten:

1) $\alpha x = \alpha o + ox = +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
2) $\alpha x' = \alpha o - ox' = +\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
3) $\alpha' x = -\alpha' o + ox = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
4) $\alpha' x' = -\alpha' o - ox' = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.

Bew. Siehe den Beweis unter 12. Aufl. 3. Daß αx, $\alpha' x$ positiv, $\alpha x'$, $\alpha' x'$ negativ werden, folglich der Punkt x rechts von α, α', der Punkt x' links von α, α' fällt, geht auch aus den Formeln hervor, da die Wurzelgröße größer ist als die Vorgröße.

Aufl. 2. (Fig. 15). Mache $\alpha\alpha' = a$, $\alpha\beta = b$, $\alpha\gamma = c$. Beschreibe über $\beta\gamma$ einen Halbkreis, errichte in α das Perpendikel $\alpha\varepsilon$ (§. 4. 1.), und schlage aus o, der Mitte von $\alpha\alpha'$, mit $o\varepsilon$ einen Kreis, der die verlängerte $\alpha\alpha'$ in den Punkten x, x' dergestalt schneidet, daß folgende Werthe zum Vorschein kommen:

$ox = ox' = o\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$, daher, weil $\alpha o = \alpha' o = \frac{1}{2}a$ ist:

(1) $\alpha x = \alpha o + ox = +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
(2) $\alpha x' = \alpha o - ox' = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
(3) $\alpha' x = -\alpha' o + ox = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.
(4) $\alpha' x' = -\alpha' o - ox' = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$.

Bew. Es ist $\alpha\varepsilon = \sqrt{bc}$ nach 9.;

ferner $o\varepsilon = \sqrt{(o\alpha)^2 + (\alpha\varepsilon)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$ nach dem Pyth. Lehrs.;

endlich $\alpha o = \alpha' o = \frac{1}{2}a$ der Construction gemäß.

NB. Vorstehende Constructionen bleiben auch anwendbar, wenn $b = c$ ist.

23) $y^2 \mp ay = -bc$, oder $y = \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

NB. y wird unmöglich, wenn $bc > \frac{1}{4}a^2$ ist; es wird $= \pm \frac{1}{2}a$, wenn $bc = \frac{1}{4}a^2$ ist.

Aufl. 1. (Fig. 14). Die unter 16. Aufl. 3. angegebene Construction, nur mit dem Unterschiede, daß hier das dortige $\alpha\alpha' = a$ gesetzt werden muß. Nach dieser Abänderung entspringen, den obigen Folgerungen gemäß, aus Fig. 14. folgende Werthe:

(1) $\alpha x = \alpha o + ox = +\frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.
(2) $\alpha x' = \alpha o - ox' = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.
(3) $\alpha' x = -\alpha' o + ox = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.
(4) $\alpha' x' = -\alpha' o - ox' = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

Bew. Siehe den Beweis unter 16. Aufl. 3. Aus den Formeln ergiebt sich auch unmittelbar, daß $y < a$, αx, $\alpha x'$ positiv, $\alpha' x$, $\alpha' x'$, negativ werden, und daher x und x' zwischen α und α' fallen müssen. Wäre $bc = \frac{1}{4}a^2$, so würde der Kreis die αα' in o berühren, folglich $y = \pm\frac{1}{2}a$ werden, wie oben bemerkt.

Aufl. 2. (Fig. 16). Mache $o\alpha = o\alpha' = \frac{1}{2}a$, $o\beta = b$, $o\gamma = c$, also $\alpha\alpha' = a$, $\beta\gamma = b + c$. Beschreibe über βγ einen Halbkreis, errichte in o das Perpendikel oε (§. 4. 1.), und schlage aus ε mit $o\alpha = \frac{1}{2}a$ einen Halbkreis, der die αα' in den Punkten x, x' dergestalt schneidet, daß

$ox = ox' = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$ wird, folglich

weil $o\alpha = o\alpha' = \frac{1}{2}a$ ist:

1) $\alpha x = \alpha o + ox = +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

2) $\alpha x' = \alpha o - ox' = +\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

3) $\alpha' x = -\alpha' o + ox = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

4) $\alpha' x' = -\alpha' o - ox' = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

Bew. Es ist $o\varepsilon = \sqrt{bc}$ nach 9.;

ferner $ox = ox' = \sqrt{(o\alpha)^2 - (o\varepsilon)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$ nach dem Pyth. Lehrs. Endlich $o\alpha = o\alpha' = \frac{1}{2}a$ der Construction zufolge, woraus sich die aufgestellten Werthe von selbst ergeben.

NB. Vorstehende Constructionen gelten natürlich auch für den Fall, wenn $b = c$ ist.

24) $aby^2 + cdey = fghk$, oder $y = -\frac{\frac{1}{2}cde}{ab} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{cde}{ab}\right)^2 + \frac{fghk}{ab}}$.

Aufl. Constr. 1) $\frac{cde}{ab} = m$, $\frac{ghk}{ab} = n$ nach 3.

2) $y = \pm\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + fn}$ nach 22.

25) $aby^2 + cdey = -fghk$, oder $y = \pm\frac{1}{2}\frac{cde}{ab} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{cde}{ab}\right)^2 - \frac{fghk}{ab}}$.

NB. y wird unmöglich, wenn $fghk > \frac{1}{4}\left(\frac{cde}{ab}\right)^2$.

Aufl. Constr. 1) $\frac{cde}{ab} = m$, $\frac{ghk}{ab} = n$ nach 3.

2) $y = \pm\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - fn}$ nach 23.

NB. Auf ähnliche Weise werden gemischt-quadratische Gleichungen von mehr als drei homogenen Gliedern construirt.

§. 16ª. Aufg. Den Mittelpunkt und Halbmesser eines Kreises zu finden, zu dessen Bestimmung gegeben sind:

1) Zwei Punkte der Peripherie.

Aufl. Die Größe des Halbmessers ist von der Wahl des Mittelpunktes abhängig. Letzterer liegt, aus bekannten Gründen, in einer Geraden, welche leicht nach §. 8. 1., §. 4. 1. gefunden wird.

2) Ein Punkt der Peripherie und eine Gerade als Tangente. Der Punkt liege

2′) in der Geraden selbst.

Aufl. leicht nach §. 4. 1. Der Halbmesser ist von unbestimmter Größe.

2″) Außerhalb der Geraden.

Aufl. Nach §. 9.

3) Zwei nebeneinander liegende Gerade als Tangenten. Es seyen

3′) beide Gerade parallel gegeneinander.

Aufl. Der Halbmesser ist von bestimmter Größe, der Mittelpunkt kann in einer Geraden beliebig gewählt werden, welche sich leicht durch Anwendung des §. 4. 1. und §. 8. 1. ergiebt.

3″) Beide Gerade geneigt gegeneinander.

Aufl. Der Halbmesser ist hier von der Wahl des Mittelpunkts abhängig. Letzterer liegt, nach einem bekannten Satze der Kreislehre, in einer Geraden, welche durch §. 8. 2. gefunden wird, ersterer wird, nach Annahme des letzteren, mittelst §. 9. bestimmt.

4) Drei Punkte der Peripherie, folglich nicht in einer Geraden liegend.

Aufl. leicht nach §. 8. 1., §. 4. 1.

5) Zwei Punkte der Peripherie und eine nicht zwischenliegende Gerade als Tangente. Beide Punkte o, o' seyen gegeben:

5′) in gleichen Abständen von der Geraden $\alpha\beta$.

Aufl. Der Berührungspunkt des Kreises in der Geraden $\alpha\beta$, oder deren Verlängerung, wird leicht durch Anwendung des §. 8. 1., §. 4. 1. bestimmt, wodurch dann die fernere Lösung der Aufgabe auf 4. zurückgeführt ist.

5″) In ungleichen Abständen von der Geraden $\alpha\beta$.

Aufl. (Fig. 17). Um in der Geraden $\alpha\beta$, oder deren Verlängerung, den Berührungspunkt x des gesuchten Kreises zu finden, verlängere die Sehne oo' bis zur Schneidung der $\alpha\beta$ in δ. Setze $\delta o = d$, $\delta o' = d'$, $\delta x = y$. Für den Fall, daß y eine Tangente des durch

o, o', x gelegten Kreises ist, ergiebt sich, aus bekannten Gründen, folgende Proportion: $d : y = y : d'$, also $y = \sqrt{dd'}$, ein Ausdruck, welcher leicht nach §. 15. 9. construirt wird, wenn über δo ein Halbkreis geschlagen, in o' das Perpendikel $o'\varepsilon$ errichtet, und $\delta x = \delta\varepsilon$ gemacht wird. Die weitere Ausführung der Construction entweder nach 4., oder durch Errichtung zweier Perpendikel in x und μ, der Mitte von o, o', welche beide gehörig verlängert den Mittelpunkt des gesuchten Kreises schneiden müssen.

Bew. folgt aus der Proportion $d : y = y : d'$.

NB. Läge einer der Punkte, etwa o', in $\alpha\beta$, oder in deren Verlängerung, so bedürfte man keines Halbkreises über $o\delta$, weil x mit o' in δ zusammenfiele.

6) Zwei Gerade als Tangenten, und ein Zwischenpunkt als Punkt der Peripherie. Es seyen

6′) beide Gerade parallel gegeneinander.

Aufl. Analog jener unter 3′. Der Mittelpunkt muß jedoch in der Zwischen-Parallelen so gewählt werden, daß sein Abstand von dem gegebenen Punkt dem Halbmesser des Kreises gleich werde.

6″) Beide Geraden geneigt gegeneinander.

Aufl. (Fig. 18). Es seyen die, bis zur Schneidung in α verlängerten Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ und o der gegebene Zwischenpunkt. Das Centrum ω des Kreises muß nach 3″. in der Halbirungslinie $\alpha\vartheta$ des Winkels α liegen, und würde sich leicht mittelst eines Perpendikels, im Berührungspunkt x eines Schenkels, etwa des $\alpha\beta$, errichtet, bestimmen lassen, wenn jener Berührungspunkt aufgefunden wäre. Zu diesem Behufe denke x, folglich auch das Perpendikel $x\omega$ bekannt; ziehe ωx, ωo als Halbmesser, aus o die $ov \mp \alpha\beta$, durch o die $\delta\varepsilon$ senkrecht auf $\alpha\beta$, und setze der Kürze wegen $\alpha\delta = d$, $\alpha x = y$, $\delta\varepsilon = e$, $\delta o = \nu x = f$, $\omega o = \omega x = z$.

Folglich $\delta x = ov = d - y$, $\omega\nu = z - f$, so ergiebt sich leicht:

aus dem rechtwinkeligen Dreieck $ov\omega$ mittelst des Pyth. Lehrs.

$(o\omega)^2 = (ov)^2 + (\omega\nu)^2$, d. h.

$z^2 = (d - y)^2 + (z - f)^2$, folglich

$$z = \frac{(d - y)^2 + f^2}{2f} \quad (1).;$$

aus den rechtwinkeligen ähnlichen Dreiecken $\alpha\delta\varepsilon$, $\alpha x\omega$:

$\delta\varepsilon : \alpha\delta = \omega x : x\alpha$, d. h. $e : d = z : y$, alſo

$z = \frac{ey}{d}$ (2).;

durch Gleichſetzung und Entwickelung der Formeln (1). und (2).:

$y = d + \frac{ef}{d} \pm \sqrt{\left(d + \frac{ef}{d}\right)^2 - (d^2 + f^2)}$, oder, wenn

$d + \frac{ef}{d} = g$ und $d^2 + f^2 = h^2$ geſetzt wird:

$y = g \pm \sqrt{g^2 - h^2}$ (3)., ein Ausdruck, welcher nach §. 15. leicht conſtruirt werden kann, wie folgt:

Mache $\delta\phi = \delta o = f$, ziehe $\phi\varkappa \mp \alpha\varepsilon$, und meſſe auf $\alpha\delta$ die $\delta\lambda = \delta\varkappa$ ab, ſo iſt

$\delta\varkappa = \frac{ef}{d}$ (§. 15. 1.) und $\alpha\lambda = \alpha\delta + \delta\varkappa = d + \frac{ef}{d} = g$.

Schlage über $\alpha\lambda = g$ einen Halbkreis, lege in denſelben die Sehne $\alpha\pi = \alpha o = \sqrt{(\alpha\delta)^2 + (\delta o)^2} = \sqrt{d^2 + f^2} = h$ (§. 15. 11.) und beſchreibe aus λ mit

$\lambda\pi = \sqrt{(\alpha\lambda)^2 - (\alpha\pi)^2} = \sqrt{g^2 - h^2}$ (§. 15. 15.)

einen Halbkreis, der die $\alpha\beta$ in x und x', den geſuchten Berührungspunkten zweier, durch o zu legender Kreiſe, ſchneidet, deren Mittelpunkte in $\alpha\vartheta$ mittelſt der Perpendikel $x\omega$, $x'\omega'$ gefunden werden.

Bew. Aus der Conſtruction ergiebt ſich

1) $\alpha x = \alpha\lambda - \lambda\pi = g - \sqrt{g^2 - h^2}$,

2) $\alpha x' = \alpha\lambda + \lambda\pi = g + \sqrt{g^2 + h^2}$,

alſo die Richtigkeit der Löſung, weil die Gleichungen (1)., (2). und (3). auf der Bedingung beruhen, daß αx, $\alpha x'$ Tangenten der geſuchten Kreiſe ſeyen.

NB. Läge der Punkt o in der Geraden $\alpha\beta$ ſelbſt, ſo wäre $\alpha x = \alpha o = \alpha\delta = d$, wie dies auch leicht aus Formel (3). abgeleitet werden kann.

7) Drei Gerade als Tangenten, folglich zwei derſelben geneigt gegen die dritte.

Aufl. Verlängere zwei der Geraden bis zur Winkelbildung mit der dritten, halbire dieſe Winkel nach §. 8. 2. und verlängere die Halbirungslinien bis zur gegenſeitigen Schneidung, ſo ergiebt ſich dadurch das Centrum des geſuchten Kreiſes, wie leicht bewieſen werden kann.

8) Eine Gerade als Sehne, nebſt einem zugehörigen Peripheriewinkel.

Aufl. Nach 5″. NB. mittelſt Berückſichtigung des Satzes: daß der Abſchnittswinkel zwiſchen einer Sehne und Tangente gleich ſey dem Peripheriewinkel im entgegengeſetzten Abſchnitt.

§. 16b. Aufg. Den Mittelpunkt und Halbmesser eines Kreises zu bestimmen, welcher

9) einen gegebenen Kreis berührt, und einen gegebenen Punkt schneidet. Es liege der Punkt

9′) in der Peripherie des gegebenen Kreises.

Aufl. leicht. Der Halbmesser ist von unbestimmter Größe.

9″) Außerhalb der Peripherie des gegebenen Kreises.

Aufl. Die Aufgabe ist unbestimmt; ihre Lösung läßt sich für je zwei Kreise, von denen der eine äußerlich, der andere innerlich den gegebenen berührt, folgendermaßen aussprechen:

Ziehe aus o eine beliebige Sekante durch den gegebenen Kreis, errichte auf der Mitte sowohl der ganzen Sekante, als ihres äußern Stücks Perpendikel, und ziehe aus dem Centrum des Kreises durch die Schneidungspunkte der Peripherie und der Sekante gerade Linien, so werden diese, gehörig verlängert, die eben genannten Perpendikel in den Mittelpunkten der gesuchten Berührungskreise schneiden, wie sich dies leicht nachweisen läßt.

NB. Würde die Sekante durch das Centrum des Kreises gezogen, so hätte man zur Auffindung der beiden Mittelpunkte nur §. 10. anzuwenden.

10) Einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt. Es sey die Gerade

10′) eine Tangente des gegebenen Kreises.

Aufl. Nach 9′., der Halbmesser ist von unbestimmter Größe.

10″) Eine Sekante des gegebenen Kreises.

Aufl. (Fig. 19). Der Mittelpunkt des gegebenen Kreises heiße γ, die Sekante $\alpha\beta$. Wähle in letzterer einen beliebigen Punkt δ, außerhalb des Kreises, ziehe die Tangente $\delta\varepsilon$ (§. 11. 2.), mache $\delta\varkappa = \delta\varepsilon$, errichte in $\varkappa$ das Perpendikel $\varkappa\mu$, und verlängere den durch ε gelegten Halbmesser $\gamma\varepsilon$ bis zur Schneidung des Perpendikels $\varkappa\mu$ in ν, so läßt sich leicht darthun, daß ν der Mittelpunkt, und $\nu\varepsilon = \nu\varkappa$ der Halbmesser eines der obigen Bedingung entsprechenden Kreises seyn müsse.

10‴) Weder eine Tangente, noch eine Sekante des gegebenen Kreises.

Aufl. Nach §. 10″. Eine weniger allgemeine Lösungsart ergiebt sich auch durch Anwendung des §. 6. 2′. und §. 10.

11) Zwei außereinander liegende Kreise berührt.

Aufl. Die Halbmeſſer der gegebenen Kreiſe ſeyen durch a und b, die Mittelpunkte durch α, β, die Centrale $\alpha\beta$ durch c, und der unbeſtimmte Halbmeſſer des geſuchten Kreiſes durch y bezeichnet. Wähle y beliebig, jedoch $> \frac{c-a-b}{2}$, und beſchreibe aus α mit $a+y$, aus β mit $b+y$ zwei Kreiſe, welche einander in zwei Punkten, den Mittelpunkten der verlangten Kreiſe, ſchneiden, wie leicht zu erweiſen iſt.

12) Einen gegebenen Kreis berührt, und zwei gegebene Punkte ſchneidet. Es ſey gegeben

12′) der Punkt o in der Peripherie, der Punkt o′ außerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

Aufl. Man erhält Mittelpunkt und Halbmeſſer des geſuchten Kreiſes, wenn o, o′ durch eine Gerade verbunden werden, auf dem Mittelpunkt dieſer ein Perpendikel errichtet, und der durch o gelegte Halbmeſſer bis zur Schneidung des genannten Perpendikels verlängert wird. Der Beweis hat keine Schwierigkeit.

Für welche Lage der Punkte o, o′ kann die Löſung der Aufgabe durch §. 10. bewerkſtelligt werden?

Für welche Lage jener Punkte wird ſie unmöglich?

12″) Der Punkt o in der Peripherie, der Punkt o′ innerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

Aufl. Nach 12′.

12‴) Beide Punkte o, o′ außerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

Aufl. (Fig. 20). Ziehe die Gerade oo′, errichte auf deren Mitte μ das Perpendikel $\mu\nu\nu'$, und fälle darauf aus α, dem Centrum des gegebenen Kreiſes, die Senkrechte $\alpha\beta$. Nenne den Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes x, denke er ſey in $\mu\nu\nu'$ richtig gefunden, und ſetze, nachdem ox, αx gezogen,

$\alpha\beta = a$, $\beta\mu = b$, $o\mu = o'\mu = m$,

$\alpha\delta = r$, $\mu x = y$, $ox = \delta x = z$,

folglich $\alpha x = z + r$, $\beta x = b - y$, oder auch $y - b$.

Mittelſt Anwendung des Pyth. Lehrſatzes auf die beiden rechtwinklichen Dreiecke $\alpha\beta x$, $o\mu x$, ergeben ſich zur Beſtimmung des $\mu x = y$, oder des $ox = z$, folgende zwei Gleichungen:

$$z + r = \sqrt{a^2 + (b-y)^2} \quad (1).$$

$$z + r = r + \sqrt{m^2 + y^2} \quad (2).$$

Um y zu entwickeln, setze (1). = (2)., quadrire diese Gleichungen, und ordne sie, so entsteht:

$2r\sqrt{m^2+y^2} = a^2+b^2-m^2-r^2-2by$, oder,

$a^2+b^2-m^2-r^2 = p^2$ gesetzt,

$2r\sqrt{m^2+y^2} = p^2-2by$ (3).

Erhebe abermals zum Quadrat, ordne die Gleichung nach y, und dividire durch 4, so folgt:

$(b^2-r^2)y^2 - bp^2y = -\frac{1}{4}(p^4-4m^2r^2)$, oder

$b^2-r^2 = q^2$ gesetzt,

$q^2y^2 - bp^2y = -\frac{1}{4}(p^4-4m^2r^2)$ (4).

Löse (4). nach bekannter Methode, so ergiebt sich:

$$y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 - \frac{(p^4-4m^2r^2)}{4q^2}} \quad (5).,$$ oder

nach gehöriger Reduction:

$$y = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right) \quad (5').$$

Aus Formel (5'). ist ersichtlich, daß der Werth des y nur imaginair werden kann, wenn q^2 negativ, d. h. $b^2 < r^2$ ist. Es möchte nützlich seyn, die Hauptmodificationen, welche beide Formeln nach verschiedenen Quantitäts-Relationen der Größen a, b, m, r erleiden, hier aufzustellen. Zu diesem Behufe sey:

I.) q^2 positiv, d. h. $b > r$, folglich b nicht $= o$; ferner

1) p^2 positiv, d. h. $a^2+b^2 > m^2+r^2$, wo a auch $= o$ seyn darf.

Beide Formeln behalten ihre ursprüngliche Gestalt, nämlich

$$y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{p^2}\right)^2 - \frac{(p^4-4m^2r^2)}{4q^2}} \quad (5)$$

$$y = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right) \quad (5').$$

Zerlege das letzte Wurzelglied der Formel (5). in Factoren,

$p^4-4m^2r^2 = (a^2+r^2-(m-r)^2)(a^2+b^2-(m+r)^2)$ (F).

Bezeichne die beiden Werthe des y durch $\pm y'$, $\pm y''$, jenachdem sie positiv oder negativ werden, und suche aus (F). und (5). die Gründe für folgende Behauptungen abzuleiten. Man erhält:

1') $+y'$, $-y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2 < (m+r)^2$ ist.

2') $+y'$, $+y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2 > (m+r)^2$ ist.

3') $y' = \frac{bp^2}{q^2}$, $y'' = o$ . . . . . , wenn $a^2+b^2 = (m+r)^2$ ist.

2) p^2 negativ, d. h. $a^2+b^2<m^2+r^2$, wo a auch $=o$ seyn darf:
(5)., (5′). werden für diesen Fall:

$$y=-\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2-\frac{(p^4-4m^2r^2)}{4q^2}}\ (6).$$

$$y=-\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right)\ (6').$$

Aus Betrachtung der obigen Zerlegung (F). ergiebt sich:

4′) $+y'$, $-y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2>(m-r)^2$ ist.
5′) $-y'$, $-y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2<(m-r)^2$ ist.
6′) $y'=o, y''=-\frac{bp^2}{q^2}$ . . . . . , wenn $a^2+b^2=(m-r)^2$ ist.

3) p^2 gleich Null, d. h. $a^2+b^2=m^2+r^2$, wo a auch $=o$ seyn darf.
Es entsteht hier die einfache Formel:

$$y^2=\pm\sqrt{\frac{m^2r^2}{q^2}},\ \text{oder}\ y=\pm\frac{mr}{q}\ (7).,\ \text{folglich}$$

7′) $y'=y''$.

II. q^2 negativ, d. h. $b<r$, folglich auch annullirbar. Es sey

1) p^2 positiv, d. h. $a^2+b^2>m^2+r^2$, wo a nicht $=o$ seyn darf.
Die Gleichungen (5)., (5′). werden demnach zu:

$$y=-\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2+\frac{(p^4-4m^2r^2)}{4q^2}}\ (8).$$

$$y=-\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2-\frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right)\ (8').$$

woraus, mittelst Berücksichtigung der Zerlegung (F)., folgt:

8′) $+y'$, $-y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2>(m+r)^2$ ist.
9′) y', y'' imaginair oder negativ, wenn $a^2+b^2<(m+r)^2$ ist.
10′) $y'=o, y''=-\frac{bp^2}{q^2}$ . . . . . , wenn $a^2+b^2=(m+r)^2$ ist.

2) p^2 negativ, d. h. $a^2+b^2<m^2+r^2$, wo a nicht $=o$ seyn darf.
Die Gleichungen (5)., (5′). erhalten hier folgende Gestalt:

$$y=\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2+\frac{(p^4-4m^2r^2)}{4q^2}}\ (9).$$

$$y=\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2-\frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right)\ (9').$$

woraus sich mit Rücksicht auf (F). ergiebt:

11′) $+y'$, $-y''$ von ungleicher Größe, wenn $a^2+b^2<(m-r)^2$ ist.
12′) y', y'' imaginair oder positiv, wenn $a^2+b^2>(m-r)^2$ ist.
13′) $y'=\frac{bp^2}{q^2}$, $y''=o$ . . . . . , wenn $a^2+b^2=(m-r)^2$ ist.

3) p^2 gleich Null, d. h. $a^2+b^2=m^2+r^2$, wo a nicht $=o$ seyn darf.
Hier ergiebt sich die einfache Formel:

$$y^2=-\frac{m^2r^2}{q^2}, \text{ oder } y=\sqrt{-\frac{m^2r^2}{q^2}} \quad (10).,$$ also

14′) y', y'' imaginair.

III.) q^2 gleich Null, d. h. $b=r$, folglich nicht annullirbar. Es sey
1) p^2 positiv, d. h. $a>m$, wo a nicht gleich o seyn darf.
Aus Gleichung (4). ergiebt sich die Formel:

$$y=\frac{p^4-4m^2r^2}{4bp^2}, \text{ also}$$

15′) y positiv, wenn $a^2>m(m+2r)$ ist.
16′) y negativ, wenn $a^2<m(m+2r)$ ist.
17′) $y=o,..,$ wenn $a^2=m(m+2r)$ ist.

2) p^2 negativ, d. h. $a<m$, wo a auch $=o$ seyn darf.
Aus Gleichung (4). entspringt die Formel:

$$y=-\frac{p^4-4m^2r^2}{4bp^2}, \text{ also}$$

18′) y positiv, wenn $a^2>m(m-2r)$ ist.
19′) y negativ, wenn $a^2<m(m-2r)$ ist.
20′) $y=o...,$ wenn $a^2=m(m-2r)$ ist.
woraus folgt, daß $m>2r$ seyn muß.

3) p^2 gleich Null, d. h. $a=m$.
Für diesen Fall wird $y=x$, d. h. unbestimmbar. Der Punkt o fiele in die Peripherie des gegebenen Kreises, und $\infty o'$ wäre eine Tangente desselben (vergleiche Aufgabe 12′).

Construction der allgemeinen Formel (5).:
A) für den Fall, daß $a^2+b^2>(m+r)^2$, $b>r$, also p^2, q^2 positiv, und $p^4>4m^2r$ ist, folglich die Gleichung:

$$y=\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2-\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{m^2r^2}{p^2}\right)} \quad (5).$$

zwei positive Wurzeln erhält. (Vergleiche oben I. 1. 2).
Nach der oben angegebenen Bedeutung und Bezeichnung sey in (Fig. 21).
$\alpha\gamma=\alpha\delta=r$, $o\mu=o'\mu=m$, $\alpha\beta=a$, $\beta\mu=b$.

Ziehe $\alpha\mu = \sqrt{a^2 + b^2}$ (§. 15. 11.), und ſchlage darüber einen Halbkreis. Lege an den Endpunkt γ des Halbmeſſers $\alpha\gamma$ die Tangente $\gamma\psi$, miß darauf ab $\gamma\varepsilon = o\mu = m$, und ziehe $\alpha\varepsilon$. Schlage aus α mit $\beta\mu = b$ einen Bogen, der die $\gamma\psi$ in ζ ſchneidet, ſo iſt:

$\alpha\varepsilon = \sqrt{m^2 + r^2}$ (§. 15. 11.), $\gamma\zeta = \sqrt{b^2 - r^2} = q$ (§. 15. 15).

Trage in den über $\alpha\mu$ gezeichneten Halbkreis die Sehnen $\alpha\eta = \alpha\varepsilon$, $\mu\vartheta = \gamma\zeta$, und ziehe $\mu\eta$, ſo entſteht:

$\mu\eta = \sqrt{(\alpha\mu)^2 - (\alpha\eta)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - m^2 - r^2} = p$ (§. 15. 15).

$\mu\vartheta = \gamma\zeta = \sqrt{b^2 - r^2} = q$.

Fälle aus η, ϑ auf $\alpha\mu$ die Perpendikel $\eta\varkappa$, $\vartheta\lambda$, ſo wird nach §. 15. 9. $(\mu\eta)^2 = p^2 = \alpha\mu \cdot \mu\varkappa$, und $(\mu\vartheta)^2 = q^2 = \alpha\mu \cdot \mu\lambda$, folglich $p^2 : q^2 = \mu\varkappa : \mu\lambda$.

Mache auf $\mu\eta = p$ das Stück $\mu\varrho = r$; ziehe ηo, und aus ϱ an μo die $\varrho\pi \mp \eta o$, ſo wird $\mu\pi = \frac{mr}{p}$ (§. 15. 1).

Schlage aus π mit $\frac{1}{2}\mu\eta = \frac{1}{2}p$ einen Bogen, der das Perpendikel $\mu\nu'$ dergeſtalt in τ ſchneidet, daß

$\mu\tau = \sqrt{(\pi\tau)^2 - (\mu\tau)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}}$ entſteht (§. 15. 15).

Setze dieſe Linie der Kürze wegen $= t$, alſo $\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2} = t^2$.

Ziehe $\lambda\tau$, und aus $\varkappa$, an das Perpendikel $\mu\nu'$, die $\varkappa\Phi \mp \lambda\tau$, ſo ergiebt ſich:

$\mu\Phi = \frac{p^2}{q^2}\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}} = \frac{p^2t}{q^2}$ (§. 15. 1).

Ziehe $\lambda\beta$, und aus $\varkappa$, an das Perpendikel $\mu\nu$, die $\varkappa\sigma \mp \lambda\beta$, ſo entſteht $\mu\sigma = \frac{bp^2}{q^2}$ (§. 15. 1).

Errichte endlich auf $\mu\sigma$ die nach derſelben Seite zugeſtreckten Perpendikel $\mu\tau' = \mu\tau = t$, $\sigma\Phi' = \mu\Phi = \frac{p^2t}{q^2}$, ziehe $\tau'\Phi'$, halbire dieſelbe in ω, und ſchlage aus ω mit $\omega'\tau = \omega\Phi'$ einen Kreis, welcher die $\mu\sigma$ (obiger Bedingung gemäß) dergeſtalt in den Punkten x, x' ſchneiden wird, daß ſich ergiebt:

$$\mu x = y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 - \frac{p^2t^2}{q^2}}$$

$$\mu x' = y' = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 - \frac{p^2t^2}{q^2}}$$ (§. 15. 23).

wodurch der Halbmeſſer $o x$ für die Berührung von Innen, der Halbmeſſer $o x'$ für die Berührung von Außen gefunden iſt.

Conſtruction der Formel (5).:

B) für den Fall, daß $a^2 + b^2 < (m - r)^2$, $b < r$, alſo p^2, q^2 negativ, und $p^4 > 4m^2r^2$ iſt, folglich

$$y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 + \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}\right)} \quad (9).$$

zwei entgegengeſetzte Wurzeln erhält (vergleiche II. 2. 11').

Es ſey, obiger Bezeichnung gemäß, in

(Fig. 22.) $o\mu = o'\mu = m$, $\alpha\beta = a$, $\beta\mu = b$, und r der Halbmeſſer des gegebenen Kreiſes.

Ziehe $\alpha\mu = \sqrt{a^2 + b^2}$ (§. 15. 11.); errichte auf $\mu o = m$ das Perpendikel $o\psi$, miß darauf ab $o\varepsilon = r$, ziehe $\mu\varepsilon = \sqrt{m^2 + r^2}$ (§. 15. 11.), und beſchreibe über $\mu\varepsilon$ einen Halbkreis.

Schlage aus β mit dem Halbmeſſer r einen Bogen, der das Perpendikel $\mu o'$ in ζ ſchneidet, ſo wird $\mu\zeta = \sqrt{r^2 - b^2} = q$ (§. 15. 15).

Trage in den über $\mu\varepsilon$ conſtruirten Halbkreis die Sehnen $\varepsilon\eta = \alpha\mu$, $\mu\vartheta = \mu\zeta$, und ziehe $\mu\eta$, ſo entſteht:

$$\mu\eta = \sqrt{(\mu\varepsilon)^2 - (\varepsilon\eta)^2} = \sqrt{m^2 + r^2 - a^2 - b^2} = p \text{ (§. 15. 15).}$$

$$\mu\vartheta = \mu\zeta = \sqrt{r^2 - b^2} = q.$$

Fälle aus η, ϑ auf $\mu\varepsilon$ die Perpendikel $\eta\varkappa$, $\vartheta\lambda$, ſo ergiebt ſich nach §. 15. 9. $(\mu\eta)^2 = p^2 = \mu\varepsilon \cdot \mu\varkappa$, $(\mu\vartheta)^2 = q^2 = \mu\varepsilon \cdot \mu\lambda$, folglich

$p^2 : q^2 = \mu\varkappa : \mu\lambda$.

Mache auf $\mu\eta = p$ das Stück $\mu\varrho = r$; ziehe ηo, und aus ϱ an oo' die $\varrho\pi \parallel \eta o$, ſo wird:

$$\mu\pi = \frac{mr}{p} \text{ (§. 15. 1).}$$

Schlage aus π mit $\frac{1}{2}\mu\eta = \frac{1}{2}p$ einen Bogen, der die Senkrechte $\mu\nu'$ in τ ſchneidet, wodurch ſich ergiebt:

$$\mu\tau = \sqrt{(\tau\pi)^2 - (\mu\pi)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}} = t \text{ (§. 15. 15.),}$$

wenn $\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2} = t^2$ geſetzt wird.

Ziehe $\lambda\tau$, und aus $\varkappa$ an das Perpendikel $\mu\nu'$ die $\varkappa\Phi \parallel \lambda\tau$, ſo wird

$$\mu\Phi = \frac{p^2 t}{q^2} \text{ (§. 15. 1).}$$

Ziehe $\lambda\beta$, und aus $\varkappa$ an das Perpendikel $\mu\nu$ die $\varkappa\sigma \mp \lambda\beta$, ſo wird $\cdot \mu\sigma = \frac{bp^2}{q^2}$ (§. 15. 1).

Errichte endlich auf $\mu\sigma$ die nach entgegengeſetzten Seiten zugeſtreckten Perpendikel $\mu\tau' = \mu\tau = t$, $\sigma\phi' = \mu\phi = \frac{p^2 t}{q^2}$; ziehe $\tau'\phi'$, halbire dieſe Gerade in ω, und beſchreibe aus ω mit $\omega\tau' = \omega\phi'$ einen Kreis, welcher, obiger Bedingung zufolge, die $\mu\sigma$ in den Punkten x, x′ ſo ſchneidet, daß ſich ergiebt:

$$\mu x = y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 + \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}\right)}.$$

$$\mu x' = y' = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 + \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{4}p^2 - \frac{m^2r^2}{p^2}\right)},$$

woraus die beiden Halbmeſſer ox, ox' für die Berührung von Innen entſpringen.

NB. Nicht weniger einfach iſt die figürliche Darſtellung der übrigen Formeln. Die Ausführung derſelben muß jedoch, der Kürze wegen, den Leſern überlaſſen bleiben.

12IV) Beide Punkte o, o' innerhalb der Fläche des gegebenen Kreiſes.

Aufl. (Fig. 23). Es ſey α der Mittelpunkt des gegebenen Kreiſes, $\mu\nu\nu'$ ein Perpendikel, im Halbirungspunkt μ der Geraden oo' errichtet, $\alpha\beta$ eine Senkrechte, aus α auf $\mu\nu$ gefällt; x das in $\mu\nu\nu'$ gelegene Centrum des geſuchten Kreiſes, welcher den gegebenen in δ, einem Punkte der verlängerten Centrale αx, berührt. Ziehe ox, und ſetze:

$\alpha\beta = a$, $\beta\mu = b$, $o\mu = o'\mu = m$,

$\alpha\delta = r$, $\mu x = y$, $ox = \delta x = z$,

$\alpha x = r - z$, $\beta x = b - y$.

Mittelſt Anwendung des Pythagoräiſchen Lehrſatzes auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\alpha\beta x$, μox ergeben ſich nachſtehende zwei Gleichungen:

$$r - z = \sqrt{a^2 - (b - y)^2} \quad (1).$$

$$r - z = r - \sqrt{m^2 + y^2} \quad (2).,$$

woraus durch Gleichſetzung, Quadrirung und Reducirung entſpringt:

$$2r\sqrt{m^2 + y^2} = m^2 + r^2 - a^2 - b^2 + 2by, \text{ oder,}$$

$m^2 + r^2 - a^2 - b^2 = p^2$ geſetzt,

$$2r\sqrt{m^2 + y^2} = p^2 + 2by \quad (3).$$

eine Gleichung, welche nach abermaliger Quadrirung und Anordnung nachstehende Form erhält:

$(r^2 - b^2)y^2 - bp^2y = \frac{1}{4}(p^4 - 4m^2r^2)$, oder

$r^2 - b^2 = q^2$ gesetzt

$q^2y^2 - bp^2y = \frac{1}{4}(p^4 - 4m^2r^2)$ (4).

und demgemäß folgende Werthe giebt:

$$y = \frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}bp^2}{q^2}\right)^2 + \frac{p^4 - 4m^2r^2}{4q^2}} \text{ (5)., oder}$$

$$y = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{m^2r^2q^2}{p^4}}\right) \text{ (5')},$$

Formeln, welche mit (9)., (9'). unter 12'''. identisch, also auch nach derselben Constructionsweise figürlich darstellbar sind. Die Qualitäts- und Quantitäts-Bestimmung der Wurzelwerthe, mittelst analytischer Bedingungen in der Art, wie dies unter 12'''. geschehen, bleibt, der Kürze wegen, dem Leser überlassen. Bemerkt werde hier bloß, daß jene Wurzelwerthe stets möglich ausfallen, wenn die Punkte o, o' wirklich innerhalb der Fläche des gegebenen Kreises liegen, weil in diesem Falle p^2, q^2 stets positiv sind, und $p^4 > 4m^2q^2$.

Die Constr. der Formel (5). nach der unter 12'''. angegebenen Methode B. bedarf wohl keiner Auseinandersetzung. Um jedoch ein Schema für die Construction der Formeln (5')., (6')., (8'). (9'). unter 12'''. zu geben, soll hier die figürliche Darstellung der Formel (5'). = (9'). gelehrt werden.

Es sey demnach in

(Fig. 24.) α der Mittelpunkt, r der Halbmesser des gegebenen Kreises, und obiger Bedeutung und Bezeichnung gemäß:

$\alpha\beta = a$, $\beta\mu = b$, $o\mu = o'\mu = m$.

Lege an $\mu o = m$ das Perpendikel $o\gamma = r$, und ziehe:

$\mu\gamma = \sqrt{m^2 + r^2}$, $\mu\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ (§. 15. 11).

Schlage aus β mit dem Halbmesser r einen Bogen, der die verlängerte $\mu o'$ in ε schneidet; beschreibe über $\mu\gamma$ einen Halbkreis, und trage in denselben die Sehnen $\gamma\eta = \mu\alpha$, $\mu\vartheta = \mu\varepsilon$; ziehe $\mu\eta$, so ist:

$\mu\eta = \sqrt{(\mu\gamma)^2 - (\gamma\eta)^2} = \sqrt{m^2 + r^2 - a^2 - b^2} = p$ .. (§. 15. 15).

$\mu\vartheta = \mu\varepsilon = \sqrt{r^2 - b^2} = q$ (§. 15. 15).

Fälle aus η, ϑ auf $\mu\gamma$ die Perpendikel $\eta\varkappa$, $\vartheta\lambda$, so wird nach §. 15. 9.:

$(\mu\eta)^2 = p^2 = \mu\gamma \cdot \mu\varkappa$, und $(\mu\vartheta)^2 = q^2 = \mu\gamma \cdot \mu\lambda$, folglich $p^2 : q^2 = \mu\varkappa : \mu\lambda$.

Mache auf $\mu\eta = p$ die $\mu\varrho = r$; ziehe ηo, und aus ϱ an μo die $\varrho\tau \mp \eta o$. Ziehe ferner $\varkappa\tau$, und aus λ an $\mu\tau$ die $\lambda\Phi \mp \varkappa\tau$, ſo entſteht nach §. 15. 1.:

$$\mu\tau = \frac{mr}{p}, \quad \mu\Phi = \frac{\mu\tau \cdot q^2}{p^2} = \frac{mrq^2}{p^3}.$$

Halbire $\mu\beta = b$ in ψ, mache $\psi\sigma = \psi\pi = \frac{1}{2}r$, alſo $\pi\sigma = r$; errichte in σ, π die nach derſelben Seite zugeſtreckten Perpendikel $\pi\tau' = \mu\tau = \frac{mr}{p}$, $\sigma\Phi' = \mu\Phi = \frac{mrq^2}{p^3}$; ziehe die Gerade $\tau'\Phi'$, halbire dieſelbe in ω, und ſchlage darüber aus ω, mit $\omega\tau' = \omega\Phi'$, einen Halbkreis, der die $\pi\sigma$ in den Punkten u, u′ ſchneidet, dergeſtalt, daß ſich nach §. 15. 16. ergiebt:

$$\psi u = +\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \frac{mr}{p} \cdot \frac{mrq^2}{p^3}},$$

$$\psi u' = -\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \frac{mr}{p} \cdot \frac{mrq^2}{p^3}}, \text{ folglich,}$$

weil $\mu\psi = \frac{1}{2}\mu\beta = \frac{1}{2}b$ iſt,

$$\mu u = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \frac{m^2r^2q^2}{p^4}},$$

$$\mu u' = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - \frac{m^2r^2q^2}{p^4}}.$$

Ziehe λu, $\lambda u'$, und aus $\varkappa$ die $\varkappa x \mp \lambda u$, die $\varkappa x' \mp \lambda u'$, ſo wird nach §. 15. 1.:

$$\mu x = \frac{p^2 \cdot \mu u}{q^2} = y,$$

$$\mu x' = \frac{p^2 \cdot \mu u'}{q^2} = y'.$$

wodurch offenbar zwei Halbmeſſer $ox = z$, $ox' = z'$ gefunden ſind, deren Kreiſe der Aufgabe genügen.

13) Zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Zwiſchenkreis berührt. Es ſeyen:

13′) Beide Gerade parallel gegeneinander.

Aufl. Nenne den Abſtand beider Parallelen h, den Halbmeſſer des Zwiſchenkreiſes r. Ziehe eine dritte Parallele in gleichen Abſtänden von den gegebenen, und ſchlage aus dem Mittelpunkte des Zwiſchen-

kreiſes mit $r + \frac{1}{4}h$ einen Bogen, der die mittlere Gerade im Punkt x, dem Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes, ſchneidet. — Beweis leicht.

13″) Beide Gerade geneigt gegeneinander.

Aufl. (Fig. 25). Es ſeyen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ die bis zur Schneidung verlängerten Geraden, o der Mittelpunkt, r der Halbmeſſer des gegebenen Kreiſes. Das Centrum ω des geſuchten Kreiſes liegt offenbar in $\alpha\mu$, der Halbirungslinie des Winkels α. Denke es wäre richtig gefunden, und ziehe $o\omega$, ſodann aus ω die ωx ſenkrecht gegen $\alpha\beta$, aus o die $o\nu \mp \alpha\beta$, und $\eta\delta \mp \omega x$, ſo ergiebt ſich leicht, wenn geſetzt wird:

$\alpha\delta = d$, $\delta\varepsilon = e$, $\delta o = \nu x = f$, $\delta\eta = r + f$.

$\alpha x = y$, $\omega x = z$, $o\omega = r + z$, $\delta x = o\nu = d - y$, $\nu\omega = f - z$.

aus dem rechtwinkligen Dreieck $o\nu\omega$:

$(o\omega)^2 = (\nu o)^2 + (\nu\omega)^2$, d. h.

$(r + z)^2 = (d - y)^2 + (f - z)^2$, alſo

$$z = \frac{f^2 - r^2 + (d - y)^2}{2(r + f)} \quad (1).$$

Aus den ähnlichen Dreiecken $\alpha\delta\varepsilon$, $\alpha x\omega$:

$\delta\varepsilon : \alpha\delta = \omega x : \alpha x$, d. h.

$e : d = z : y$, alſo $z = \frac{ey}{d}$ (2).

Durch Gleichſetzung und Entwickelung der Formeln (1)., (2):

$$y = d + \frac{e(r+f)}{d} \pm \sqrt{\left(d + \frac{e(r+f)}{d}\right)^2 - (d^2 + f^2 - r^2)} \quad (3).$$ oder nach gehöriger Reduktion:

$$y = d + \frac{e(r+f)}{d} \pm \sqrt{\frac{e^2(r+f)^2}{d^2} + (r+f)(2e + r - f)} \quad (3').$$

Formeln, welche mit jener unter 6″. identiſch werden, wenn $r = o$ wird.

Conſtr. der Formel (3). (Fig. 25.):

Mache $\delta\vartheta = \delta\eta = r + f$, ziehe aus ϑ auf $\delta\eta$ die $\vartheta x \mp \alpha\varepsilon$, und mache

$\delta\lambda = \delta x = \frac{e(r+f)}{d}$ (§. 15. 1.), folglich

$\alpha\lambda = d + \frac{e(r+f)}{d}$.

Ziehe $\alpha o = \sqrt{d^2 + f^2}$ (§. 15. 11.), ſchlage darüber einen Halbkreis, der den gegebenen Kreis in ζ ſchneidet, ſo entſteht:

$\alpha\zeta = \sqrt{(\alpha o)^2 - (o\zeta)^2} = \sqrt{d^2 + f^2 - r^2}$ (§. 15. 15).

Schlage aus λ mit dem Halbmesser λσ einen Bogen, welcher die αβ in x, x′ dergestalt schneidet, daß

$$\alpha x = y = d + \frac{e(r+f)}{d} + \sqrt{\left(d + \frac{e(r+f)}{d}\right)^2 - (d^2 + f^2 - r^2)} \text{ und}$$

$$\alpha x' = y' = d + \frac{e(r+f)}{d} - \sqrt{\left(d + \frac{e(r+f)}{d}\right)^2 - (d^2 + f^2 - r^2)} \text{ wird.}$$

Errichte endlich in x, x′ die bis an αμ verlängerten Perpendikel xω, x′ω′, so ergeben sich ω, ω′ als Mittelpunkte, ωx, ω′x′ als Halbmesser der verlangten Kreise.

NB. Eine nicht minder einfache Construction geht aus der Formel (3′). hervor.

14) Einen gegebenen Kreis nebst einer gegebenen Geraden berührt, und einen gegebenen Punkt schneidet.

14′) Es liege der Punkt o in der Peripherie des gegebenen Kreises.

Aufl. (Fig. 26). Es sey o der bestimmte Berührungspunkt in der Peripherie des um μ construirten Kreises, αβ die gegebene Gerade. Ziehe μo; lege an o die Tangente oτ, mache τφ = τo, errichte in φ ein Perpendikel, welches den verlängerten Halbmesser μo in x, dem Mittelpunkt des gesuchten Kreises, schneidet, wie dies leicht bewiesen werden kann.

NB. Läge der Punkt o in der aus μ auf αβ gezogenen Senkrechten μγ, etwa in o′, oder o″, so würde im ersten Fall o′γ, im letzten o″γ der Durchmesser des verlangten Kreises seyn.

14″) Es liege der Punkt o in der Geraden αβ.

Aufl. (Fig. 27). Fälle aus μ, dem Mittelpunkt des gegebenen Kreises, auf αβ die Senkrechte μγ; errichte in o das Perpendikel oε, und denke das in demselben liegende Centrum x des gesuchten Kreises gefunden. Ziehe μx, νx ∓ oγ, und setze:

$\mu\gamma = g$, $\gamma o = \nu x = c$, $\mu\delta = r$,

$ox = \delta x = z$, $\mu x = r + z$, $\mu\nu = g - z$,

so ergiebt sich leicht aus dem rechtwinckligen Dreieck μνx:

$(\mu x)^2 = (\mu\nu)^2 + (\nu x)^2$, d. h.

$(r + z)^2 = (g - z)^2 + c^2$, oder

nach gehöriger Entwickelung und Reduction:

$$z = \frac{g^2 + c^2 - r^2}{2(g + r)}, \text{ oder } 2z = g - r + \frac{c^2}{g + r},$$

ein Ausdruck, welcher nach §. 15. ohne Schwierigkeit auf folgende Art construirt werden kann:

Ziehe $o\vartheta$; aus η die $\eta\varkappa \pm \gamma o$, die $\eta\lambda$ senkrecht gegen $o\vartheta$, so wird $o\lambda =$ dem Durchmesser des gesuchten Kreises, d. h. $= 2z$.

Bew. Es ist $\gamma\vartheta = g + r$, $\gamma o = \varkappa\eta = c$, der Winkel $\lambda\eta\varkappa$ gleich dem Winkel $\gamma\vartheta o$ und $\gamma = \varkappa = R$, folglich das Dreieck $o\gamma\vartheta$ ähnlich dem Dreieck $\eta\varkappa\lambda$; daher

$\gamma\vartheta : \gamma o = \eta\varkappa : \varkappa\lambda$, also

$$\varkappa\lambda = \frac{c^2}{g + r}, \text{ folglich,}$$

weil $o\varkappa = g - r$ ist:

$$o\lambda = o\varkappa + \varkappa\lambda = g - r + \frac{c^2}{g + r} = 2z.$$

NB. Läge der Punkt o in γ, so wäre $\gamma o = c$ gleich Null, folglich $z = \frac{1}{2}(g - r) = \frac{1}{2}\gamma\varkappa$, für welchen Fall $g > r$ seyn müßte.

14‴) Der Punkt o außerhalb der Geraden, und außerhalb der Peripherie des gegebenen Kreises.

Aufl. (Fig. 28). Es sey μ der Mittelpunkt, r der Halbmesser des gegebenen Kreises, o der bestimmte Peripheriepunkt, x das gefundene Centrum des gesuchten Kreises, welcher die Gerade $\alpha\beta$ in u, den gegebenen Kreis in δ berührt. Ziehe μx, ox, ferner durch μ, o, x die $\vartheta\gamma$, $o\varkappa$, xu senkrecht auf $\alpha\beta$, endlich $x\nu \mp \alpha\beta$, $o\lambda \mp \alpha\beta$, und setze:

$\mu\gamma = g$, $\mu\delta = r$, $\vartheta\gamma = g + r$, $\varrho\gamma = g - r$, $\delta x = ux = ox = z$,

$\gamma\varkappa = a$, $\varkappa\varrho = b$, $\gamma u = \nu x = y$, $\mu x = r + z$,

$\nu\mu = \pm(g - z)$, $\lambda x = \pm(z - b)$, $\varkappa u = o\lambda = \pm(y - a)$,

so ergiebt sich leicht

aus den rechtwinkligen Dreiecken $\mu\nu x$, $o\lambda x$:

$(\mu x)^2 = (\nu\mu)^2 + (\nu x)^2$, d. h.

$(r + z)^2 = (g - z)^2 + y^2$, oder

$$2z = \frac{y^2 + g^2 - r^2}{g + r} \quad (1).$$

$(ox)^2 = (o\lambda)^2 + (\lambda x)^2$, d. h.

$z^2 = (y - a)^2 + (z - b)^2$, oder

$$2z = \frac{(y - a)^2 + b^2}{b} \quad (2).$$

Durch Gleichsetzung der Formeln (1)., (2)., nebst Entwickelung und Anordnung:

$y^2(g+r-b) - 2a(g+r)y = -(g+r)(a^2+b^2-b(g-r))$ (3)., oder, wenn gesetzt wird:

$g+r-b=e$ positiv oder negativ, jenachdem $g+r \gtrless b$ ist,
$a^2+b^2-b(g-r)=f$ positiv od. negativ, jenachdem $a^2+b^2 \gtrless b(g-r)$ ist:

$$ey^2 - 2a(g+r)y = -(g+r)f^2 \quad (4).$$

Durch Lösung der Gleichung (4).:

$$y = \frac{a(g+r)}{e} \pm \sqrt{\frac{a^2(g+r)^2}{e^2} - \frac{(g+r)f^2}{e}} \quad (5).,$$

und, wenn $b=g+r$ wäre:

$$y = \tfrac{1}{2}a + \frac{br}{a} \quad (6).$$

Die Untersuchungen über die mancherlei Umstellungen der Formel (5). nach verschiedenen Relationen der Größen a, b, g, r in der Art, wie sie unter 12. gemacht worden, müssen hier der Kürze wegen dem Leser überlassen bleiben. Uebrigens hat die Construction der Formel (5). keine Schwierigkeit; der Figuren-Ersparung halber geben wir sie nach Anlage der Fig. 28., d. h. für den Fall, daß e und f^2 positiv sind.

Constr. der Formel (5). (Fig. 28.):

Verlängere die $o\lambda$ dergestalt, daß $\gamma\vartheta$ in ε geschnitten wird, so entsteht:

$$\gamma\varepsilon = \varkappa o = b, \quad \varepsilon\vartheta = \gamma\vartheta - \gamma\varepsilon = g+r-b = e.$$

Beschreibe über $\gamma\varrho = g-r$ einen Halbkreis, der die verlängerte $o\lambda$ in τ schneidet, ziehe $\gamma\tau$, so ist $\gamma\tau = \sqrt{b(g-r)}$ (§. 15. 9). — Schlage über $\gamma o = \sqrt{a^2+b^2}$ (§. 15. 11.) einen Halbkreis, trage in denselben die Sehne $o\Phi = \gamma\tau$, ziehe $\gamma\Phi$, so ist diese

$$\gamma\Phi = \sqrt{a^2+b^2+b(g-r)} = f \quad (§.\ 15.\ 15).$$

Schneide auf $\alpha\beta$ ab das Stück $\gamma\Phi' = \gamma\Phi$, errichte in Φ' das bis an $\lambda\lambda'$ verlängerte Perpendikel $\Phi'\Psi = b$, und ziehe durch Ψ die Gerade $\vartheta\sigma$, so folgt leicht aus den ähnlichen Dreiecken $\vartheta\gamma\sigma'$, $\Psi\Phi'\sigma'$:

$$\gamma\sigma' = \frac{\gamma\vartheta \cdot \gamma\Phi'}{\varepsilon\vartheta} = \frac{(g+r)f}{e}.$$

Beschreibe über $\gamma\sigma'$ einen Halbkreis, rückverlängere das Perpendikel $\Psi\Phi'$ bis zur Schneidung desselben in π, und ziehe die Sehne $\gamma\pi$, so ist

$$\gamma\pi = \sqrt{\frac{(g+r)f^2}{e}} \quad (§.\ 15.\ 9).$$

Ziehe aus ϑ durch o die Gerade $\vartheta\sigma$, so wird wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\vartheta\gamma\sigma$, $o\varkappa\sigma$:

$$\gamma\sigma = \frac{\gamma\vartheta \cdot \gamma\varkappa}{\varepsilon\vartheta} = \frac{(g+r)a}{e}.$$

Beschreibe über $\gamma\sigma$ einen Halbkreis, trage in denselben die Sehne $\gamma\omega = \gamma\pi$, ziehe die Sehne $\sigma\omega$, so wird diese

$$\sigma\omega = \sqrt{\frac{a^2(g+r)^2}{e^2} - \frac{(g+r)f^2}{e}} \quad (\S.\ 15.\ 15).$$

Schlage aus σ mit $\sigma\omega$ einen Bogen, welcher die $\alpha\beta$ in u, u′, den Berührungspunkten der verlangten Kreise, schneidet, denn es ist:

$$\gamma u = \gamma\sigma + \sigma\omega = \frac{a(g+r)}{e} + \sqrt{\frac{a^2(g+r)^2}{e^2} - \frac{(g+r)f^2}{e}} = y.$$

$$\gamma u' = \gamma\sigma - \sigma\omega = \frac{a(g+r)}{e} - \sqrt{\frac{a^2(g+r)^2}{e^2} - \frac{(g+r)f^2}{e}} = y'.$$

Ziehe endlich ou, ou′, errichte sowohl in u, u′, wie auf den Mitten von ou, ou′ Perpendikel, welche einander in x und x′, den Mittelpunkten der gesuchten Kreise, schneiden, und zugleich die Halbmesser derselben, nämlich xu, x′u′ bestimmen. (§. 16. 8).

NB. Vorstehendes Constructions-Verfahren erleidet keine wesentliche Veränderung, wenn $b > g + r$ angenommen wird.

Der Leser mag, sowohl für diesen Fall, wie für andere, die Modification und figürliche Darstellung der Formel (5)., der Uebung wegen, ausführen.

15) Zwei gegebene außereinander liegende Kreise berührt, und einen gegebenen Punkt schneidet.

15′) Der Schneidungspunkt o liege in der Peripherie eines der gegebenen Kreise.

Aufl. (Fig. 29). Es seyen α, β die Mittelpunkte, a, b die Halbmesser der gegebenen Kreise, o der bestimmte Berührungspunkt, ω das gesuchte Centrum des verlangten Kreises. Denke letzteres in der durch o gelegten Geraden $\alpha\mu$ gefunden, ziehe $\beta\omega$, und fälle aus o, ω auf $\alpha\beta$ oder deren Verlängerung die Perpendikel $o\gamma$, ωx. Setze

$\alpha o = a$, $\beta o' = b$, $\alpha\beta = c$, $o\omega = o'\omega = z$, $\alpha x = y$.

$\beta x = c - y$, $\alpha\gamma = g$, $\alpha\omega = a + z$, $\beta\omega = b + z$, $\omega x = x$,

so ergiebt sich leicht

aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\alpha\omega x$:

$(a + z)^2 = y^2 + x^2$ (1).

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\beta\omega x$:

$(b + z)^2 = (c - y)^2 + x^2$ (2).

Aus den ähnlichen Dreiecken $\alpha o y$, $\alpha \omega x$:

$$a : (a + z) = g : y, \text{ oder } z = \frac{ay - ag}{g} \quad (3).$$

Aus Gleichung (1). und (2).:

$$z = \frac{2cy + b^2 - a^2 - c^2}{2a - 2b} \quad (4).$$

Aus Gleichung (3). und (4).:

$$y = \frac{g(c^2 - (a-b)^2)}{2(cg - a(a-b))}, \text{ oder}$$

wenn Zähler und Nenner durch g dividirt werden:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c - \frac{a(a-b)}{g}} \quad (5).$$

eine Formel, welche leicht nach §. 15. räumlich dargestellt werden kann. Vor Angabe dieser Construction wollen wir jedoch die Haupt-Modificationen des Ausdrucks (5). für verschiedene Relationen der Größen a, b, c, g, unter denen, der Voraussetzung zufolge, $c > (a - b)$ ist, näher betrachten. Es sey demnach

I. $a > b$, und

1) g positiv. Man erhält:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c - \frac{a(a-b)}{g}} \quad (5)., \text{ folglich}$$

y positiv, wenn $g > \frac{a(a-b)}{c}$,

y negativ, wenn $g < \frac{a(a-b)}{c}$,

y unendlich, wenn $g = \frac{a(a-b)}{c}$ ist.

2) g negativ. Man erhält:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c + \frac{a(a-b)}{g}} \quad (6)., \text{ folglich}$$

y stets positiv.

3) g gleich Null. Man erhält:
y und z gleich Null.

II. $a < b$, und

1) g positiv. Es entsteht:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c + \frac{a(b-a)}{g}} \quad (7).$$

folglich y ſtets poſitiv.

2) g negativ. Es entſteht:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c - \frac{a(b-a)}{g}} \quad (8).,$$ alſo

y poſitiv, oder negativ, oder unendlich, jenachdem

$g >$ oder $<$ oder $= \frac{a(b-a)}{c}$ iſt.

3) g gleich Null. Es ergeben ſich:

y und z gleich Null.

III. $a = b$. Es entſteht:

$y = \frac{1}{2}c$ (9)., und

z reell, wenn g nicht gleich Null iſt.

Conſtr. der Formel (5). nach Anlage der Fig. 29.:

Schlage über $\alpha\beta = c$ einen Halbkreis, trage in denſelben die Sehne $\beta\delta = a - b$, und ziehe $\alpha\delta$, ſo iſt:

$\alpha\delta = \sqrt{c^2 - (a-b)^2}$ (§. 15. 15).

Lege an β die $\beta\mu' \mp \alpha\mu$, meſſe darauf ab $\beta\varkappa = a - b$, und errichte in $\varkappa$ das bis an $\alpha\beta$ verlängerte Perpendikel $\varkappa\lambda$, ſo ergiebt ſich aus den ähnlichen Dreiecken $\alpha o\gamma$, $\beta\varkappa\lambda$:

$$\beta\lambda = \frac{\alpha o \cdot \beta\varkappa}{\alpha\gamma} = \frac{a(a-b)}{g}, \text{ und}$$

$$\alpha\lambda = \alpha\beta - \beta\lambda = c - \frac{a(a-b)}{g}.$$

Mache $\alpha\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\delta$, ziehe $\delta\lambda$, und aus ε die $\varepsilon\vartheta \mp \delta\lambda$, ſo entſteht:

$$\alpha\vartheta = \frac{\frac{1}{2}\alpha\delta \cdot \alpha\delta}{\alpha\lambda} = \frac{\frac{1}{2}(c^2 - (a-b)^2)}{c - \frac{a(a-b)}{g}} = y.$$

Schlage aus α mit $\alpha\vartheta = y$ einen Bogen, der die $\alpha\beta$ in x ſchneidet, ſo daß $\alpha x = \alpha\vartheta = y$ wird.

Errichte endlich in x ein Perpendikel, welches die $\alpha\mu$ in ω dergeſtalt ſchneidet, daß ω der Mittelpunkt, $o\omega$ der Halbmeſſer des verlangten Kreiſes wird.

15′) Der Schneidungspunkt o liege außerhalb der Flächen beider Kreiſe.

Aufl. (Fig. 30). Es seyen α, β die Mittelpunkte, a, b die Halbmesser der gegebenen Kreise, o der bestimmte Schneidungspunkt, ω das Centrum des gesuchten Kreises, welcher die ersteren in ξ, η berührt. Denke ω richtig gefunden; ziehe $\alpha\omega$, $\beta\omega$, $o\omega$, sodann aus o, ω die $o\gamma$, ωx senkrecht auf $\alpha\beta$, und $\omega\vartheta \mp \alpha\beta$. Setze:

$\alpha\xi = a$, $\beta\eta = b$, $\alpha\beta = c$, $\omega\xi = \omega\eta = \omega o = z$,

$\alpha\omega = a + z$, $\beta\omega = b + z$, $\alpha\gamma = g$, $o\gamma = p$, $\alpha x = y$,

$\beta x = \pm (c - y)$, $\omega x = x$, $o\vartheta = \pm (p - x)$, $\omega\vartheta = \pm (y - g)$,

und folgere:

aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\alpha\omega x$:

$(a + z)^2 = y^2 + x^2$, oder

$x^2 = (a + z)^2 - y^2$ (1).

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\beta\omega x$:

$(b + z)^2 = (c - y)^2 + x^2$, oder

$x^2 = (b + z)^2 - (c - y)^2$ (2).

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $o\omega\vartheta$:

$z^2 = (g - y)^2 + (p - x)^2$, oder

$x^2 = (p - \sqrt{z^2 - (g - y)^2})^2$ (3).

Aus den Gleichungen (1)., (2)., weil (1). = (2).:

$$y = \frac{(a - b)z + \frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)}{c}, \text{ oder,}$$

wenn $a - b = d$, und $c^2 + a^2 - b^2 = f^2$ gesetzt wird:

$$y = \frac{dz + \frac{1}{2}f^2}{c} \quad (4).$$

Aus den Gleichungen (1)., (3)., weil (1). = (3).:

$2p\sqrt{z^2 - (g - y)^2} = p^2 - g^2 - a^2 + 2gy - 2az$, oder,

$p^2 - g^2 - a^2 = h^2$ gesetzt:

$p\sqrt{z^2 - (g - y)^2} = \frac{1}{2}h^2 + gy - az$ (5).

Aus der Gleichung (5). durch Quadrirung und Anordnung:

$y^2(p^2+g^2) - g(2p^2 - h^2 + 2az)y = z^2(p^2 - a^2) + ah^2z - \frac{1}{4}(h^4 + 4p^2g^2)$ od.

wenn $p^2 + g^2 = m^2$,

$2p^2 - h^2 = p^2 + g^2 + a^2 = n^2$,

$p^2 - a^2 = g^2 + h^2 = q^2$ gesetzt wird:

$m^2y^2 - (2az + n^2)gy = q^2z^2 + ah^2z - \frac{1}{4}h^4 - p^2g^2$ (6).

Aus (6). durch Entwickelung des y:

$$y = \frac{(az + \frac{1}{2}n^2)g}{m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{(az + \frac{1}{2}n^2)g}{m^2}\right)^2 + \frac{q^2z^2 + ah^2z - \frac{1}{4}(h^4 + 4p^2g^2)}{m^2}} \quad (7).$$

Aus (7). und (4). durch Gleichstellung, Quadrirung und Anordnung:

$(d^2m^2-2adcg-c^2q^2)z^2-(cdgn^2+acgf^2+ac^2h^2-dm^2f^2)z=-\frac{1}{4}(c^2h^4+4c^2p^2g^2+m^2f^4-2cgf^2n^2)$ (8).

oder, wenn sämmtliche Glieder durch acg dividirt, aus dem zweiten f, aus dem dritten f^2 als Factor gezogen, und

$\frac{d^2m^2}{acg}-2d-\frac{cq^2}{ag}=r$,

$\frac{dn^2}{af}+f+\frac{ch^2}{gf}-\frac{dfm^2}{acg}=s$,

$\frac{ch^4}{agf^2}+\frac{4cgp^2}{af^2}+\frac{m^2f^2}{acg}-\frac{2n^2}{a}=t$ gesetzt wird:

$rz^2-fsz=-\frac{1}{4}tf^2$ (8′).

Aus (8′). durch Entwickelung des z:

$z=\frac{\frac{1}{2}fs}{r}\pm\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}fs}{r}\right)^2-\frac{\frac{1}{4}tf^2}{r}}$ (9)., oder

$\frac{\frac{1}{2}f}{r}$ als Factor vorangestellt:

$z=\frac{\frac{1}{2}f}{r}(s\pm\sqrt{s^2-tr})$ (9′).

Formeln, welche nach verschiedenen Relationen der Größen a, b, c, g, p verschiedene Modificationen erleiden. Die hier erforderlichen allgemeinen Betrachtungen zur Ausmittelung der möglichen und unmöglichen Wurzelwerthe müssen der Kürze wegen dem Leser überlassen bleiben. Für Fälle der Möglichkeit bietet die Constr. keine Schwierigkeit dar. Sie läßt sich nach §. 15. auf verschiedene Weisen ausführen. Wir wollen sie der Figuren-Ersparung halber blos andeuten.

Construire nämlich:

1) f, h, m, n, q nach §. 15. 20.

2) $ag=k^2$, $af=l^2$, $gf=v^2$, nach §. 15. 9.

3) $\frac{d^2m^2}{ck^2}-2d-\frac{cq^2}{k^2}=r$, nach §. 15. 5. mit Anwendung des Halbkreises für die quadratischen Verhältnisse.

4) $\frac{dn^2}{l^2}+f+\frac{ch^2}{v^2}-\frac{dfm^2}{ck^2}-\frac{2h^2}{a}=s$, wie vorher.

5) $\frac{ch^2\,.\,h^2}{k^2\,.\,f^2}+\frac{4cgp^2}{af^2}+\frac{m^2f^2}{ck^2}-\frac{2n^2}{a}=t$, wie vorher.

6) Endlich die Formel (9). oder (9′). nach §. 15. 22. oder 23.

16) Zwei gegebene außereinanderliegende Kreiſe, und eine gegebene Gerade berührt.

Aufl. (Fig. 31). Es ſeyen α, β die Mittelpunkte, a, b die Halbmeſſer der gegebenen Kreiſe, ω das Centrum des geſuchten, welcher die erſteren in η, ϑ, die Gerade $\sigma\tau$ in x berührt. Denke ω richtig gefunden, ziehe $\alpha\omega$, $\beta\omega$, ferner durch α, β, ω die $\alpha\mu$, $\delta\nu$, ωx ſenkrecht auf $\sigma\tau$, die $\varkappa\lambda \pm \sigma\tau$ und ſetze:

$\alpha\gamma = \alpha\varepsilon = \alpha\eta = a$, $\beta\delta = \beta\varphi = \beta\vartheta = b$,

$\omega x = \omega\eta = \omega\vartheta = z$, $\alpha\omega = a + z$, $\beta\omega = b + z$,

$\alpha\mu = m$, $\alpha\varkappa = m - z$, $\mu\gamma = m + a$, $\mu\varepsilon = m - a$,

$\beta\nu = n$, $\beta\lambda = n - z$, $\nu\delta = n + b$, $\nu\varphi = n - b$,

$\mu\nu = \varkappa\lambda = p$, $\mu x = \varkappa\omega = y$, $\nu x = \lambda\omega = p - y$,

so ergiebt ſich leicht

aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\alpha x\omega$:

$(a + z)^2 = y^2 + (m - z)^2$, oder

$$2z = \frac{y^2 + m^2 - a^2}{m + a} = \frac{y^2}{m + a} + m - a \quad (1).$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\beta\lambda\omega$:

$(b + z)^2 = (p - y)^2 + (n - z)^2$, oder

$$2z = \frac{(p - y)^2 + n^2 - b^2}{n + b} = \frac{(p - y)^2}{n + b} + n - b \quad (2).$$

Aus (1). = (2). durch Entwickelung und Anordnung:

$$y^2(m + a - n - b) - 2py(m + a) =$$

$$-p(m + a)\left(p - \frac{(m - a - n + b)(n + b)}{p}\right) \quad (3).,$$ oder,

wenn $m + a = c$, $n + b = d$,

$m - a = e$, $n - b = f$ geſetzt wird:

$$y^2(c - d) - 2pcy = -pc\left(p - \frac{(e - f)d}{p}\right) \quad (3').$$

Aus (3'). durch Entwickelung des y:

$$y = \frac{pc}{c - d} \pm \sqrt{\left(\frac{pc}{c - d}\right)^2 - \frac{pc}{c - d}\left(p - \frac{(e - f)d}{p}\right)} \quad (4).,$$ oder,

$\frac{pc}{c - d} = g$, $\frac{(e - f)d}{p} = h$ geſetzt:

$$y = g \pm \sqrt{g^2 - g(p - h)} \quad (4').,$$

eine Formel, deren Wurzeln möglich oder unmöglich werden, jenachdem $p^2 \gtrless$ oder $< (d - c)(e - f)$ iſt.

Constr. der Formel (4'). nach Anlage der Fig. 31.:
Lege durch γ, δ die bis an $\sigma\tau$ verlängerte Gerade $\gamma\pi$, so ist:

$$\mu\pi = \frac{\mu\gamma \cdot \mu\nu}{\mu\gamma - \nu\delta} = \frac{pc}{c-d} = g \text{ §. 15. 1.}$$

Mache $\Phi\psi = \varepsilon\mu = m - a = e$, so entsteht:

$$\nu\psi = \varepsilon\mu - \Phi\nu = m - a - n + b = e - f.$$

Ziehe $\mu\delta$, und aus ψ auf $\sigma\tau$ die $\psi\zeta$ senkrecht gegen $\mu\delta$ gerichtet, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken:

$$\nu\zeta = \frac{\nu\psi \cdot \nu\delta}{\mu\nu} = \frac{(e-f)d}{p} = h \text{ §. 15. 1. und}$$

$$\mu\zeta = \mu\nu - \nu\zeta = p - h.$$

Beschreibe über $\mu\pi = g$ einen Halbkreis, errichte in ζ das Perpendikel ζu, ziehe μu, πu, so ist:

$$\mu u = \sqrt{\mu\pi \cdot \mu\zeta} = \sqrt{g(p-h)} \text{ §. 15. 9.}$$

$$\pi u = \sqrt{\mu\pi^2 - \mu u^2} = \sqrt{g^2 - g(p-h)} \text{ §. 15. 15.}$$

Schlage aus π mit πu einen Kreis, der die $\sigma\tau$ in x, x', den Endpunkten des gesuchten y, schneidet, denn es ist:

$$\mu x = \mu\pi - \pi u = g - \sqrt{g^2 - g(p-h)}.$$

$$\mu x' = \mu\pi + \pi u = g + \sqrt{g^2 - g(p-h)}.$$

Um ω und z zu finden, substituire μx, oder $\mu x'$ (wir wählen μx) statt y in

$$2z = \frac{y^2}{m+a} + m - a \quad (1).$$

Ziehe $\gamma\varkappa$, errichte auf derselben das Perpendikel $x\varrho$, durch welches die verlängerte $\gamma\mu$ in ϱ dergestalt geschnitten wird, daß ähnliche Dreiecke $\gamma\mu x$, $\varrho\mu x$ entstehen, folglich

$$\mu\varrho = \frac{\mu x \cdot \mu x}{\mu\gamma} = \frac{y^2}{m+a} \text{ und}$$

$$\varepsilon\varrho = \varepsilon\mu + \mu\varrho = \frac{y^2}{m+a} + m - a = 2z.$$

Errichte endlich auf $\sigma\tau$ in x ein Perpendikel, von unbestimmter Länge, ziehe an dieses Perpendikel aus ε die $\varepsilon\xi = \varrho x$, so ist:

$x\xi = \varepsilon\varrho = 2z$ der Durchmesser, und die Mitte ω das Centrum des gesuchten Kreises.

NB. Ein zweiter Kreis, den Bedingungen der Aufgabe entsprechend, wird erhalten, wenn in Formel (1). statt y der zweite Wurzelwerth $\mu x'$ substituirt wird.

Anmerkung: Wäre $e = f$, ſo würde $h = o$, folglich die angegebene Conſtruction etwas einfacher.

Wäre $c = d$, ſo verſchwände das Quadratiſche der Gleichung (3'), alſo auch die Brauchbarkeit der allgemeinen Conſtruction. Man erhält dagegen die weit einfachere Formel:

$$y = \tfrac{1}{2}\left(p - \frac{(e-f)d}{p}\right) = \tfrac{1}{2}(p-h).$$

Wäre endlich $c = d$ und $e = f$, ſo ergäbe ſich aus Reduction der Formel (3'):

$$y = \tfrac{1}{2}p.$$

17) Drei gegebene außereinander liegende Kreiſe berührt.

17') Der geſuchte Kreis ſoll die gegebenen von Außen berühren.

Aufl. (Fig. 32). Es ſeyen α, β, γ die Mittelpunkte, a, b, c die Halbmeſſer der gegebenen Kreiſe A, B, C. ω das Centrum, z der Radius des geſuchten Z, welcher erſtere in η, ζ, ϑ von Außen berührt. Verbinde ω mit α, β, γ durch Gerade; ziehe eine der Centralen, etwa $\alpha\beta$; fälle aus ω, γ auf $\alpha\beta$ die Senkrechten ωx, $\gamma\delta$, auf $\gamma\delta$ die $\omega\varepsilon$, und ſetze:

$$\alpha\omega = z + a,\ \beta\omega = z + b,\ \gamma\omega = z + c,\ \alpha\beta = g,$$
$$\alpha\delta = d,\ \alpha x = y,\ \beta x = \pm(g-y),\ \delta x = \omega\varepsilon = \pm(d-y),$$
$$\gamma\delta = e,\ \omega x = \varepsilon\delta = x,\ \gamma\varepsilon = \gamma\delta - \varepsilon\delta = \pm(e-x),$$

ſo ergiebt ſich

aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\alpha\omega x$:

$$(z+a)^2 = y^2 + x^2, \text{ oder}$$
$$z = -a + \sqrt{y^2 + x^2}\ (1).$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\beta\omega x$:

$$(z+b)^2 = (g-y)^2 + x^2, \text{ oder}$$
$$z = -b + \sqrt{(g-y)^2 + x^2}\ (2).$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $\gamma\omega\varepsilon$:

$$(z+c)^2 = (d-y)^2 + (e-x)^2, \text{ oder}$$
$$z = -c + \sqrt{(d-y)^2 + (e-x)^2}\ (3).$$

Aus (1). = (2). durch Quadrirung, Anordnung und Auflöſung:

$$x = \frac{k}{a-b}\sqrt{\tfrac{1}{4}k^2 - gy + y^2}\ (4).$$

worin $g^2 - (a-b)^2 = k^2$ geſetzt iſt.

Aus (1). = (3). durch ähnliche Operationen:

$$x = -\frac{e(\frac{1}{2}l^2 - dy) + l.(a-c)\sqrt{\frac{1}{4}l^2 - dy + y^2}}{e^2 - (a-c)^2} \quad (5).,$$

worin $d^2 + e^2 - (a-c)^2 = l^2$ gesetzt wird.

Aus (4). = (5). mittelst gehöriger Umformung die gemischt-quadratische Endgleichung für y, deren Entwickelung und Construction (nach §. 15.), der Weitläufigkeit wegen, dem Privatfleiße des Lesers überlassen bleibt.

Sind αx, $\alpha x'$, die beiden Wurzelwerthe des y, durch Construction gefunden, so ergeben sich leicht nach Formel (4). die zugehörigen Werthe $x\omega$, $x'\omega'$ des x, woraus dann z, z′, die Halbmesser der gesuchten Kreise, entspringen.

ω und z entsprechen einem Kreise, welcher die gegebenen von Außen, ω', z′ einem Kreise, welcher dieselben von Innen berührt, wie dies aus folgender Aufgabe erhellt.

17″) Der gesuchte Kreis soll die gegebenen von Innen berühren.

Aufl. (Fig. 33). Constr. und Bezeichnung der Hülfslinien für die Bildung der Bedingungsgleichungen wie unter 17′., nur mit der Abänderung, daß hier

$$\alpha\omega = z - a,\ \beta\omega = z - b,\ \gamma\omega = z - c,$$

d. h. a, b, c von entgegengesetzter Qualität genommen werden müssen. Mittelst dieser Berücksichtigung ergeben sich aus (4). und (5).:

$$x = -\frac{k}{a-b}\sqrt{\frac{1}{4}k^2 - gy + y^2}. \quad (4').$$

$$x = -\frac{e(\frac{1}{2}l^2 - dy) - l.(a-c)\sqrt{\frac{1}{4}l^2 - dy + y^2}}{e^2 - (a-c)^2} \quad (5').$$

Formeln, deren Endgleichung mit jener unter 17′ bis auf das Vorzeichen des mit y behafteten Gliedes, völlig übereinstimmt, und demgemäß dieselben, nur in der Qualität entgegengesetzten, Wurzelwerthe erzeugt.

17‴) Der gesuchte Kreis soll zwei der gegebenen von Außen, den dritten von Innen berühren.

Aufl. (Fig. 34). Der Kreis Z berühre die Peripherien A, B von Außen in η, ζ, die Peripherie C von Innen in ϑ. Hülfslinien, Bezeichnung derselben, und Ableitung der Bedingungsgleichungen wie unter 17′. Man erhält hier:

$\gamma\omega = z - c$, also c negativ, und demnach aus (4). und (5). unter 17′.

$$x = \frac{k}{a-b}\sqrt{\tfrac{1}{4}k^2 - gy + y^2} \quad (4'').,$$

worin $g^2 - (a-b)^2 = k^2$ gesetzt ist, und

$$x = -\frac{e(\tfrac{1}{2}l^2 - dy) + l(a+c)\sqrt{\tfrac{1}{4}l^2 - dy + y^2}}{e^2 - (a+c)^2} \quad (5'').,$$

worin $d^2 + e^2 - (a+c)^2 = l^2$ gesetzt ist.

Aus (4″). und (5″). wird die gemischt-quadratische Endgleichung des y auf ähnliche Weise abgeleitet, und nach §. 15. construirt, wie jene unter 17′. Man erhält zwei Kreise, von denen der eine die Peripherien A, B von Außen, und C von Innen, der zweite die Peripherien A, B von Innen, und C von Außen berührt.

17ᴵᵛ) Der gesuchte Kreis soll zwei der gegebenen von Innen, den dritten von Außen berühren.

Aufl. (Fig. 35). Es berühre der Kreis Z die Peripherien A, B von Innen in η, ζ, und C von Außen in ϑ. Nach obiger Bezeichnung der Hülfslinien zur Bildung der Bedingungsgleichungen muß hier

$\alpha\omega = z - a$, $\beta\omega = z - b$

gesetzt werden, also a und b negativ, wodurch (4). und (5). unter 17′. folgende Formen erhalten:

$$x = -\frac{k}{a-b}\sqrt{\tfrac{1}{4}k^2 - gy + y^2} \quad (4'''),$$

$$x = -\frac{e(\tfrac{1}{2}l^2 - dy) - l(a+c)\sqrt{\tfrac{1}{4}l^2 - dy + y^2}}{e^2 - (a+c)^2} \quad (5'''),$$

worin $g^2 - (a-b)^2 = k^2$, und

$d^2 + e^2 - (a+c)^2 = l^2$ gesetzt ist,

und demgemäß eine gemischt-quadratische Endgleichung für y erzeugen, welche mit jener unter 17‴. bis auf das Vorzeichen des zweiten Gliedes völlig identisch ist, folglich auch dieselben Wurzelwerthe, aber von entgegengesetzter Qualität, giebt.

NB. In wiefern sämmtliche Aufgaben unter 17. auch mittelst Construction zweier Kegelschnittslinien nach den Formeln (4)., (5)., (4″)., (5″). ohne Aufsuchung der Endgleichungen gelöst werden können, bleibt den mündlichen Erörterungen des Lehrers überlassen.

B. Construction geradlinig begrenzter Figuren nach gegebenen Bedingungen.

a) Construction eines Dreiecks nach drei gegebenen Bestimmungs-Elementen.

NB. Der Kürze wegen sollen in §. 17. bezeichnet werden (Fig. 36.):
1) Die drei Winkel des verlangten Dreiecks durch . . . . . α, β, γ.
2) Die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ durch a, b, c.
3) Die den Seiten a, b, c zugehörigen Höhen $\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\varphi$ durch . d, e, f.
4) Der Halbmesser des um das Dreieck construirten Kreises durch . . r.

§. 17. Aufg. Zur Verzeichnung eines Dreiecks sind von den genannten Bestimmungs-Elementen gegeben:

1) Drei Seiten a, b, c.

NB. Je zwei größer als die dritte.

Aufl. leicht nach §. 3.

2) Zwei Seiten und ein Winkel, und zwar:

2′) a, b, γ.

Aufl. leicht nach §. 4.

2″) a, b, α.

NB. a $=$ oder $>$ b Sin. α.

Aufl. Zeichne nach §. 4. den Winkel α, mache einen der Schenkel $=$ b, und schlage aus dem Endpunkte des b mit a einen Bogen, der den andern Schenkel berührt oder schneidet (jenachdem a $=$ oder $>$ b Sin. α ist), und dadurch die dritte Winkelspitze β des Dreiecks bestimmt.

Unter welcher Bedingung entsteht im letztern Falle ein Dreieck? unter welcher zwei Dreiecke?

3) Zwei Seiten und eine Höhe, und zwar

3′) a, b, d.

NB. b $=$ oder $>$ d.

Aufl. Nach §. 4., §. 6. 1. ꝛc.

3″) a, b, f.

NB. f darf nicht größer seyn, als die kleinste der beiden Seiten.

Aufl. Beschreibe über der größeren Seite, etwa $\beta\gamma =$ a, einen Halbkreis, schlage aus γ mit f einen Bogen, der den Halbkreis in

ϕ schneidet; ziehe durch $\beta\phi$ eine Gerade, und zeichne aus γ mit b einen Bogen, welcher in $\beta\phi$ durch Berührung oder Schneidung (jenachdem $b =$ oder $> f$ ist) die dritte Winkelspitze α bestimmt. In welchen Fällen wird das Dreieck recht-, spitz-, oder stumpfwinkelig?

4) Zwei Seiten und der Halbmesser des Umkreises a, b, r.

NB. Die größte der Seiten darf nicht größer seyn als 2r.

Aufl. leicht nach §. 12. 1.

5) Zwei Winkel und eine Seite, α, β, a.

NB. $\alpha + \beta < 2R$.

Aufl. Nach §. 4.

6) Zwei Winkel und eine Höhe, α, β, d.

NB. $\alpha + \beta < 2R$.

Aufl. leicht.

7) Zwei Winkel und der Halbmesser des Umkreises, α, β, r.

NB. $\alpha + \beta < 2R$.

Aufl. (Fig. 37). Lege an einen beliebigen Punkt γ des Umkreises die Tangente $\varkappa\gamma\lambda$, ziehe die Sehnen $\gamma\beta$, $\gamma\alpha$, erstere gegen $\gamma\varkappa$ unter dem Winkel α, letztere gegen $\gamma\lambda$ unter dem Winkel β geneigt, und verbinde α, β durch eine Gerade, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

8) Zwei Höhen und eine Seite, und zwar:

8′) d, e, a.

NB. $a =$ oder $> e$.

Aufl. Beschreibe über $\beta\gamma = a$ einen Halbkreis, errichte auf a ein Perpendikel $= d$, und ziehe durch den Endpunkt des d die $\varkappa\lambda \mp \beta\gamma$; schlage aus β mit e einen Bogen, der den Halbkreis in ε trifft; lege durch ε, γ eine Gerade, durch welche die Parallele $\varkappa\lambda$ in α, der dritten Winkelspitze des verlangten Dreiecks, geschnitten wird.

8″) d, e, c.

NB. $c =$ oder $>$ als die größte der Höhen.

Aufl. Mittelst eines Halbkreises über $\alpha\beta = c$, und Bogenschlagung aus α, β mit d, e ꝛc.

9) Zwei Höhen und ein Winkel, und zwar:

9′) d, e, α.

NB. e Cosc. $\alpha = c =$ oder $> d$.

Aufl. (Fig. 38). Zeichne einen Winkel $= \alpha$, dessen Schenkel $\Xi\alpha n$, $\alpha\vartheta$ von unbestimmter Länge sind. Errichte auf $\alpha\vartheta$ das Perpendikel

$\alpha\varepsilon = e$, ziehe $\varepsilon\varkappa \mp \alpha\vartheta$, wodurch $\alpha\eta$ in β dergestalt geschnitten wird, daß $\alpha\beta = c$ entsteht. Beschreibe über $\alpha\beta = c$ einen Halbkreis, schlage aus α mit d einen Bogen, der den Halbkreis in δ schneidet; lege durch β, δ die bis an $\alpha\vartheta$ verlängerte Gerade $\beta\gamma$, so ist $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

9″) d, e, γ.

Aufl. leicht.

10) Zwei Höhen und der Halbmesser des Umkreises d, e, r.

NB. Diese Aufgabe steht hier nur der Vollständigkeit wegen. Ihre constructionelle Lösung ist mit Schwierigkeiten verbunden, welche ich für den Augenblick nicht zu beseitigen vermag. Denn die analytische Bestimmung einer Seite führt auf eine Gleichung des 8ten, der dritten Höhe f auf eine Gleichung des 4ten Grades von folgender Form:

$$r(d^2 - e^2)^2 f^4 - 2d^3e^3f^3 + 2r(d^2 + e^2)d^2e^2f^2 = rd^4e^4.$$

Ob die Bestimmung eines Winkels oder eines andern Elements günstigere Resultate leistet, lasse ich vorläufig dahin gestellt seyn, werde aber bei mehr Muße diesen Gegenstand ins Reine zu bringen suchen.

11) Eine Seite, ein Winkel und eine Höhe, und zwar:

11′) a, β, d.

Aufl. leicht.

11″) a, β, e.

NB. $a =$ oder $> e$.

Aufl. leicht, vermittelst eines Halbkreises über a.

11‴) a, α, d.

NB. $d <$ oder $= \frac{1}{2}a$ (Cotg. α + Cosc. α).

Aufl. (Fig. 39). Lege an $\beta\gamma = a$ eine Gerade $\gamma\tau$ unter dem Winkel α; beschreibe über $\beta\gamma$ als Sehne einen Kreis, so daß $\gamma\tau$ eine Tangente wird, d. h. errichte auf der Mitte λ der $\beta\gamma$ und im Anfangspunkt γ der $\gamma\tau$ Senkrechte, welche gehörig verlängert in μ, dem Centrum des gesuchten Kreises, einander schneiden. Verlängere $\lambda\mu$ bis an die Peripherie in $\varkappa$, mache $\lambda\delta = d$, und lege durch δ die $\nu\nu' \mp \beta\gamma$, welche den Kreis in α, α' schneidet, und dadurch die dritten Winkelspitzen des verlangten Kreises bestimmt, wie dies leicht zu beweisen ist, wenn $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ oder $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$ gezogen werden.

Die Linie $\lambda\varkappa$ ist $= \mu\lambda + \mu\gamma = \frac{1}{2}a$(Cotg. α + Cosec. α), woraus hervorgeht, daß $d <$ oder $= \lambda\varkappa$ seyn müsse, wenn die Lösung der Aufgabe möglich bleiben soll.

11^{IV}) a, α, e.

NB. $a =$ oder $> e$.

Aufl. (Fig. 40). Lege an $\beta\gamma = a$ die $\gamma\tau$ unter dem Winkel α. Beschreibe wie vorher über $\beta\gamma$ einen Kreis, so daß $\gamma\tau$ eine Tangente wird, und über $\beta\gamma$ einen Halbkreis. Schlage aus β mit e einen Bogen, welcher den Halbkreis in ε schneidet. Ziehe durch γ, ε die bis an den Peripheriepunkt α des ersten Kreises verlängerte Gerade $\gamma\alpha$, so wird, wie leicht zu beweisen ist, $\alpha\beta\gamma$ das verlangte Dreieck.

12) Eine Seite, ein Winkel und der Halbmesser des Umkreises a, β, r.

NB. Bedingung der Möglichkeit leicht.

Aufl. ebenfalls leicht.

13) Eine Seite, eine Höhe und der Halbmesser des Umkreises, und zwar:

13′) a, d, r.

NB. a nicht $> 2r$, und d $<$ oder $= r + \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Aufl. Nach §. 12. 1., §. 4. 1., §. 6. 2.

13″) a, e, r.

NB. a nicht $> 2r$, und e $<$ oder $= a$.

Aufl. Nach §. 12. 1, §. 11. 2.

14) Ein Winkel, eine Höhe und der Halbmesser des Umkreises, und zwar:

14′) α, d, r.

NB. d $<$ oder $= r \sin. \alpha$ (Cotg. α + Cosec. α).

Aufl. (Fig. 39). Lege an den um μ mit r beschriebenen Kreis eine Tangente $\gamma\tau$, und ziehe die Sehne $\gamma\beta$, gegen $\gamma\tau$ unter dem Winkel α geneigt, so ist offenbar $\beta\gamma = 2r \sin. \alpha = a$, und dadurch die fernere Lösung auf $11'''$ zurückgeführt.

14″) α, e, r.

NB. $2r \sin. \alpha =$ oder $> e$.

Aufl. (Fig. 40). Lege an den gegebenen Kreis eine Tangente $\gamma\tau$, und ziehe die Sehne $\gamma\beta$, unter dem Winkel α gegen $\gamma\tau$ geneigt, so ist offenbar $\beta\gamma = 2r \sin. \alpha = a$, und die fernere Ausführung der Construction auf 11^{IV} zurückgeführt.

15) Die drei Höhen d, e, f.

Aufl. (Fig. 36). Aus Betrachtung der Figur ergeben sich leicht folgende drei Gleichungen:

$$ad = be \quad (1)., \quad \text{also } b = \frac{ad}{e} \quad (1').$$

$$ad = cf \quad (2)., \quad \text{also } c = \frac{ad}{f} \quad (2').$$

$$ad = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \quad (3).$$

Substituire (1'), (2'). in (3)., und entwickele a, so entsteht:

$$a = \frac{2dc^2f^2}{\sqrt{(de+df+ef)(de+df-ef)(de+ef-df)(df+ef-de)}},$$ oder, wenn der Abkürzung wegen gesetzt wird:

$de + df + ef = g^2 + h^2 + k^2 = m^2$,

$de + df - ef = g^2 + h^2 - k^2 = n^2$,

$de + ef - df = g^2 + k^2 - h^2 = p^2$,

$df + ef - de = h^2 + k^2 - g^2 = q^2$.

$a = \frac{2de^2f^2}{mnpq}$ (4)., und weil $b = \frac{ad}{e}$, $c = \frac{ad}{f}$ ist,

$b = \frac{2ed^2f^2}{mnpq}$ (5). $e = \frac{2fd^2e^2}{mnpq}$ (6).

Formeln, deren figürliche Darstellung leicht ausgeführt werden kann, wenn man construirt:

1) $g^2 = de$, $h^2 = df$, $k^2 = ef$ nach §. 15. 9.

2) m, n, p, q nach §. 15. 11. und 15.

3) a, b, c nach §. 15. 4.

4) Das verlangte Dreieck nach §. 17. 1.

Zur Darstellung des Dreiecks kann auch, wenn eine Seite gefunden ist, §. 17. 8. angewendet werden.

Anmerkung: Vorstehende Aufgaben bilden für die Dreiecks-Construction, in Betreff der gewählten Bestimmungs-Elemente, einen vollständig in sich abgeschlossenen Cyclus. Daß sich derselbe, durch Hinzufügung neuer Bestimmungselemente, noch beträchtlich erweitern lasse, wird wohl keiner Erörterung bedürfen. Eine wissenschaftliche, erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes könnte nur einem Werke zugemuthet werden, welches ausschließlich diesem Zwecke gewidmet wäre. Leider hat sich noch Niemand der Abfassung eines solchen Werks unterzogen, und doch liegt hierin das einzige Mittel, dem verderblichen Treiben prinziploser Compilationssucht entgegen zu wirken.

b) Construction eines Vierecks nach gegebenen Bestimmungs-Elementen.

α) Eines Parallelogramms nach drei Bestimmungs-Elementen.

NB. Der Kürze wegen sollen in §. 18. bezeichnet werden (Fig. 41.):
1) Die vier Winkel des verlangten Parallogramms durch . . . . α, β, γ, δ.
2) Die vier Seiten δα, αβ, βγ, γδ durch . . . . . a, b, a, b.
3) Die beiden Diagonalen αγ, βδ durch . . . . . e, f.
4) Die beiden Abstandsperpendikel ‥, ‥ der Parallelen a, a u. b, b durch h, k.
5) Der Durchschnittspunkt der Diagonalen durch . . . . . o.

§. 18. Aufg. Zur Verzeichnung eines Parallelogramms sind von den genannten Bestimmungs-Elementen gegeben:

1) Zwei Seiten und ein Winkel a, b, α oder β.

Aufl. Nach §. 17. 2′., §. 6. 1.

2) Zwei Seiten und eine Diagonale a, b, e oder f.

NB. Die Summe je zweier dieser Elemente größer als das dritte.

Aufl. Nach §. 17. 1., §. 6. 1.

3) Zwei Seiten und ein Abstandsperpendikel a, b, h oder k.

NB. b > oder = h.

Aufl. Nach §. 17. 3., §. 6. 1.

4) Eine Seite, ein Winkel und eine Diagonale.

4′) a, α, e.

NB. Ist α < R, so e > a; ist α = > R, so e > oder = a Sin. α.

Aufl. Nach §. 17. 2″., §. 6. 1.

4″) a, α, f.

NB. Ist α < R, so f > oder = a Sin. α; ist α = > R, so f > a.

Aufl. Nach §. 17. 2″., §. 6. 1.

5) Eine Seite, ein Winkel und ein Abstandsperpendikel a, α, h.

Aufl. §. 17. 11′., §. 6. 1.

6) Eine Seite und die beiden Diagonalen a, e, f.

NB. Die Summe je zweier der drei Größen 2a, e, f größer als die dritte.

Aufl. (Fig. 41). Constr. aus a, ½e, ½f das Dreieck αoδ, verlängre über o hinaus δo, αo, so daß oβ = oδ = ½f, oγ = oα = ½e, also δβ = f, αγ = e wird; ziehe αβ, βγ, γδ, so ist offenbar αβγδ das verlangte Parallelogramm.

7) Eine Seite, eine Diagonale, und ein Abstandsperpendikel.

7′) a, e, h.

NB. e > oder = h.

Aufl. Nach §. 17. 3′., §. 6. 1.

7″) a, e, k.

NB. k gleich oder kleiner als das kleinste der beiden andern Elemente.

Aufl. (Fig. 42). Nach §. 17. 3″., §. 6. 1. — Beschreibe nämlich über $\alpha\delta = a$ einen Halbkreis, aus α mit k einen Bogen, der den Halbkreis in η schneidet (oder in δ berührt, wen $k = a$ wäre). Lege durch η die Gerade $\delta\vartheta$ von unbestimmter Länge, und schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\delta\vartheta$ in γ trifft. Ziehe $\alpha\beta \pm \delta\gamma$, $\gamma\beta \pm \alpha\delta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Parallelogramm. — Fiele η in δ, so müßte $\delta\vartheta$ perpendikular auf $\alpha\delta$ gesetzt werden, wodurch dann ein Rechteck entstände.

8) Eine Seite und die beiden Abstandsperpendikel a, h, k.

NB. a > oder = k.

Aufl. (Fig. 42). Nach §. 17. 8′., §. 6. 1. — Ziehe nämlich $\alpha\delta$ und $\delta\vartheta$ wie unter 7″., errichte auf $\alpha\delta = a$ ein Perpendikel $\alpha\varepsilon = h$, ziehe durch ε die $\beta\gamma \pm \alpha\delta$, und aus α die $\alpha\beta \pm \delta\gamma$, so ist, wie leicht zu erweisen, $\alpha\beta\gamma\delta$ das geforderte Parallelogramm.

9) Ein Winkel und die beiden Diagonalen α, e, f.

NB. $\frac{1}{2}e <$ oder $= \frac{1}{2}f(\text{Cotg. } \alpha + \text{Cosec. } \alpha)$.

Aufl. (Fig. 43). Beschreibe, nach §. 16. 8., über $\beta\delta = f$ als Sehne einen Kreis, dessen Abschnittswinkel $= \alpha$ ist. Schlage aus o, der Mitte von $\beta\delta$, mit $\frac{1}{2}e$ einen Bogen, welcher die Abschnittswinkel in den Punkten α, α' schneidet; ziehe $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, und aus β, δ die $\beta\gamma \pm \alpha\delta$, die $\delta\gamma \pm \alpha\beta$; oder auch $\alpha'\beta$, $\alpha'\delta$ und $\beta\gamma' \pm \alpha'\delta$, $\delta\gamma' \pm \alpha'\beta$, so sind offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta\gamma'\delta$ Parallelogramme, welche der Bedingung genügen.

Wäre $\frac{1}{2}e = \frac{1}{2}f(\text{Cotg. } \alpha + \text{Cosec. } \alpha)$ gleich dem Perpendikel ox, so entstände, weil α, α' in x zusammenfielen, nur ein Parallelogramm. Auch leuchtet ein, daß $\frac{1}{2}e$ nicht größer seyn dürfe als ox, wenn die Lösung der Aufgabe möglich bleiben soll.

10) Ein Winkel, eine Diagonale, und ein Abstandsperpendikel.

10′) α, e, h.

NB. $e > h \text{ Cosec. } \alpha$, wenn $\alpha < R$; $e = > h$, wenn $\alpha = > R$ ist.

Aufl. (Fig. 44). Nach §. 17. 11^{IV}., §. 6. 1. — Lege nämlich zwei Gerade $\alpha\mu$, $\alpha\nu$, von unbeſtimmter Länge, an einander, unter dem Winkel α; errichte auf $\alpha\mu$ ein Perpendikel $\alpha\varepsilon = h$, ziehe $\varepsilon\eta \pm \alpha\mu$, wodurch $\alpha\nu$ in β geſchnitten wird; ſchlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varepsilon\eta$ in γ ſchneidet, ziehe $\gamma\delta \pm \alpha\beta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Parallelogramm.

10″) α, e, k.

NB. $e > k$ Coſec. α, wenn $\alpha < R$; $e =$ oder $> k$, wenn $\alpha =$ oder $> R$ iſt.

Aufl. (Fig. 44). Nach §. 17. 11^{IV}., §. 6. 1. — Lege nämlich, wie vorher, $\alpha\mu$, $\alpha\nu$ unter dem Winkel α an einander, errichtea uf $\alpha\nu$ das Perpendikel $\alpha\vartheta = k$, ziehe $\vartheta\lambda \pm \alpha\nu$, wodurch $\alpha\mu$ in δ geſchnitten wird, und ſchlage aus α mit e einen Bogen, der die $\vartheta\lambda$ in γ ſchneidet; ziehe endlich $\gamma\beta \pm \alpha\delta$, ſo leuchtet ein, daß das Parallelogramm den aufgeſtellten Bedingungen entſpricht.

10‴) α, f, h.

NB. $f => h$, wenn $\alpha < R$; $f > h$ Coſec. α, wenn $\alpha > R$ iſt.

Aufl. (Fig. 44). Nach §. 17. 11^{IV}., §. 6. 1. — Conſtr. nämlich $\alpha\mu$, $\alpha\nu$, $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\eta$ nach den unter 10′ aufgeſtellten Bedingungen. Schlage aus β mit f einen Bogen, der die $\alpha\mu$ in δ ſchneidet, ziehe $\delta\gamma \pm \alpha\beta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Parallelogramm.

10^{IV}) α, f, k.

NB. $f =< k$, wenn $\alpha < R$; $f > k$ Coſec. α, wenn $\alpha =< R$ iſt.

Aufl. (Fig. 44). Nach §. 17. 11^{IV}., §. 6. 1. — Conſtr. nämlich $\alpha\mu$, $\alpha\nu$, $\alpha\vartheta$, $\vartheta\lambda$ wie unter 10″, ſchlage aus δ mit f einen Bogen, der die $\alpha\nu$ in β ſchneidet; ziehe $\beta\gamma \pm \alpha\delta$, ſo ergiebt ſich leicht, daß das Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ den Forderungen entſpricht.

11) Ein Winkel und die beiden Abſtandsperpendikel α, h, k.

Aufl. (Fig. 44). Nach §. 17. 9″., §. 6. 1. — Lege nämlich zwei Gerade $\alpha\mu$, $\alpha\nu$ von unbeſtimmter Länge, unter dem Winkel α, an einander; errichte auf $\alpha\mu$ das Perpendikel $\alpha\varepsilon = h$, auf $\alpha\nu$ das Perpendikel $\alpha\vartheta = k$, ziehe $\varepsilon\eta \pm \alpha\mu$, $\vartheta\lambda \pm \alpha\nu$, ſo werden $\alpha\nu$, $\alpha\mu$ dergeſtalt in β, γ, δ geſchnitten, daß das Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ völlig den aufgeſtellten Bedingungen entſpricht.

12) Ein Abſtandsperpendikel, und die beiden Diagonalen h, e, f.

NB. h darf nicht größer ſeyn, als die kleinſte der Diagonalen.

Aufl. (Fig. 41). Conſtr. aus $\alpha o = \frac{1}{2}e$, $\delta o = \frac{1}{2}f$, $\varepsilon o = \frac{1}{2}h$ das Dreieck $\alpha o \delta$ nach §. 17. 3″., und vollende die figürliche Darſtellung des verlangten Parallelogramms nach §. 18. 6.

13) Eine Diagonale, und die beiden Abſtandsperpendikel e, h, k.

NB. Das größte der Abſtandsperpendikel darf nicht größer ſeyn als e.

Aufl. leicht — mittelſt eines Halbkreiſes über e ꝛc.

β) Conſtruction eines Trapezes nach vier Beſtimmungs-Elementen.

NB. Der Kürze wegen ſollen in §. 19. ſtets bezeichnet werden (Fig. 45).:

1) Die vier Winkel des verlangten Trapezes durch . . . . . $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
2) Die beiden parallelen Seiten $\delta\alpha$, $\beta\gamma$ durch . . . . . a, c.
3) Die beiden nicht parallelen Seiten $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ durch . . . . . b, d.
4) Die beiden Diagonalen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ durch . . . . . e, f.
5) Das Abſtandsperpendikel „ der parallelen Seiten durch . . . . h.
6) Der Durchſchnittspunkt der Diagonalen durch . . . . . o.

§. 19. Aufg. Zur Verzeichnung eines Trapezes ſind von den genannten Beſtimmungs-Elementen gegeben:

1) Die vier Seiten a, b, c, d.

NB. Die Summe je zweier der drei Größen (a — c), b, d muß größer ſeyn als die dritte.

Aufl. (Fig. 46). Mache $\alpha\delta = a$, $\alpha\eta = a - c$, ſchlage aus α mit b, aus η mit d Bogen, die ſich in β ſchneiden, ziehe $\beta\gamma \parallel \alpha\delta$, $\delta\gamma \parallel \beta\eta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

2) Drei Seiten und ein Winkel.

2′) a, b, c, α.

Aufl. leicht.

2″) a, b, c, δ.

NB. $b \gtrless (a - c) \sin. \delta$, wenn $\delta \lessgtr R$; $b > (a - c)$, wenn $\delta \gtrless R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Mache $\delta\alpha = a$, $\delta\vartheta = a - c$, und conſtruire nach §. 17. 2″. aus $\delta\vartheta = a - c$, $\vartheta\gamma = b$, und Winkel δ das Dreieck $\delta\gamma\vartheta$, ziehe $\alpha\beta \parallel \gamma\vartheta$, $\gamma\beta \parallel \alpha\delta$, ſo iſt, wie leicht zu erweiſen, $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

2‴) a, b, d, α.

NB. $d >$ oder $= b \sin. \alpha$.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. nach §. 17. 2′. aus $\alpha\delta = a$, $\alpha\beta = b$, Winkel α das Dreieck $\alpha\beta\delta$; ziehe $\beta\varkappa \parallel \alpha\delta$, und ſchlage aus δ mit d

einen Bogen, der die $\beta\varkappa$ in einem Punkte γ berührt oder ſchneidet, verbinde δ und γ durch eine Gerade, ſo iſt $\alpha\beta\gamma\delta$ offenbar ein der Bedingung entſprechendes Trapez. — Ein zweites Trapez ergiebt ſich aus dem zweiten Durchſchnittspunkte des Bogens und der Geraden $\beta\varkappa$.

3) Drei Seiten und eine Diagonale.

3′) a, b, c, e.

NB. Die Summe je zweier der Elemente b, c, e muß größer ſeyn als das dritte.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. nach §. 17. 1. aus $\alpha\beta = b$, $\beta\gamma = c$, $\alpha\gamma = e$ das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, ziehe $\alpha\delta = a \parallel \beta\gamma$, und verbinde γ, δ durch eine Gerade, ſo entſpricht offenbar das Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ der obigen Bedingung.

3″) a, b, d, e.

NB. Die Summe je zweier der Elemente a, d, e muß größer ſeyn als das dritte, und b gleich oder größer als das durch a, d, e beſtimmte h.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. nach §. 17. 1. aus $\alpha\delta = a$, $\delta\gamma = d$, $\alpha\gamma = e$ das Dreieck $\alpha\gamma\delta$, ziehe $\gamma\lambda \parallel \alpha\delta$, und ſchlage aus α mit b einen Bogen, der die $\gamma\lambda$ in einem Punkte β berührt oder ſchneidet, verbinde α, β durch eine Gerade, ſo iſt, wie leicht zu erweiſen, $\alpha\beta\gamma\delta$ ein der Forderung entſprechendes Trapez, während ein zweites durch den zweiten Durchſchnittspunkt des Bogens und der Geraden $\gamma\lambda$ gewonnen werden könnte.

4) Drei Seiten und das Abſtandsperpendikel der Parallelen.

4′) a, b, c, h.

NB. $b \geqq h$.

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\delta = a$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon = h$, ziehe durch ε die $\varkappa\lambda \parallel \alpha\delta$, ſchlage aus α mit b einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in ε berührt, oder in β, β' ſchneidet. Mache $\beta\gamma = c$, ziehe $\gamma\delta$, ſo iſt $\alpha\beta\gamma\delta$ offenbar ein obiger Bedingung entſprechendes Trapez. Ein zweites würde ſich auf dieſelbe Art mittelſt des zweiten Durchſchnittspunktes β' ergeben ꝛc.

4″) a, b, d, h.

NB. h darf nicht größer ſeyn als die kleinſte der nicht parallelen Seiten.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. $\alpha\delta = a$, $\alpha\varepsilon = h$, $\varkappa\lambda \parallel \alpha\delta$ wie unter 4′; ſchlage aus α mit b, aus δ mit d Bogen, welche die $\varkappa\lambda$ in β, β', γ, γ' ſchneiden, ziehe $\beta\alpha$, $\gamma\delta$, ſo iſt, wie leicht zu erweiſen, $\alpha\beta\gamma\delta$

ein der Forderung entsprechendes Trapez. — Auf dieselbe Weise entspringen auch Trapeze, der Bedingung gemäß, wenn die übrigen Durchschnittspunkte in Betracht gezogen werden.

5) Zwei Seiten und zwei Winkel.

5′) a, c, α, δ.

NB. $a > c$, wenn $\alpha + \delta < 2R$; $a < c$, wenn $\alpha + \delta > 2R$.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\delta = a$ die Geraden $\alpha\mu$, $\delta\nu$, unter den Neigungswinkeln α, δ; mache $\alpha\vartheta = c$, und ziehe die $\vartheta\gamma \mp \alpha\mu$, die $\gamma\beta \mp \alpha\delta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

5″) a, b, α, δ.

NB. $b < \frac{a \text{ Sin. } \delta}{\text{Sin. } (\alpha + \delta)}$, wenn $\alpha + \delta < 2R$ ist.

Aufl. (Fig. 46). Constr. $\alpha\delta = a$, $\alpha\mu$, $\delta\nu$ wie unter 5′; mache $\alpha\beta = b$, und ziehe $\beta\gamma \mp \alpha\delta$, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

Die Formel für die Möglichkeits-Bedingung ergiebt sich leicht aus nachstehender Betrachtung:

Verlängere die Convergirenden $\alpha\mu$, $\delta\nu$ bis zur Schneidung in π, setze $\alpha\pi = x$, so folgt aus dem Dreiecke $\alpha\pi\delta$ nach einem bekannten Satze der Trigonometrie:

$$a : x = \text{Sin. } (\alpha + \delta) : \text{Sin. } \delta, \text{ oder } x = \frac{a \text{ . Sin. } \delta}{\text{Sin. } (\alpha + \delta)}, \text{ also } b < x,$$

wenn die Construction des geforderten Trapezes möglich bleiben soll.

6) Zwei Seiten und die beiden Diagonalen.

6′) a, c, e, f.

NB. $e + f > a + c$; $e - f < a + c$.

Aufl. (Fig. 47). Aus dem richtig construirten Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ ergiebt sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\alpha o\delta$, $\beta o\gamma$:

$\alpha o : \alpha\delta = \gamma o : \beta\gamma$,

$\delta o : \alpha\delta = \beta o : \beta\gamma$, oder

wenn der Abkürzung wegen gesetzt wird:

$\alpha o = x$, $\delta o = y$, folglich $\gamma o = e - x$, $\beta o = f - y$:

$$x : a = (e - x) : c, \text{ also } x = \frac{ae}{a + c} \text{ (1).}$$

$$y : a = (f - y) : c, \text{ also } y = \frac{af}{a + c} \text{ (2).}$$

Aus (1). und (2). entspringt zuvörderst, weil $x + y > a$, und $x - y < a$ seyn muß, die Formel der Möglichkeits-Bedingung, sodann durch Anwendung des §. 15. 1. nachstehende Construction:

Zeichne $\alpha\delta = a$, vor- und rückverlängere dieſe Gerade bis ϕ, ψ, ſo daß $\delta\phi = \alpha\psi = c$, alſo $\alpha\phi = a + c$, $\delta\psi = a + c$ wird. Lege an α, δ, unter beliebigen Winkeln, die $\alpha\gamma' = e$, die $\delta\beta' = f$; ziehe $\phi\gamma'$, $\psi\beta'$, und aus δ, α die $\delta\xi \pm \phi\gamma'$, die $\alpha u \pm \psi\beta'$, ſo iſt nach §. 15. 1.

$$\alpha\xi = \frac{ae}{a+c} = x, \quad \delta u = \frac{af}{a+c} = y.$$

Schlage aus α mit $\alpha\xi = x$, aus δ mit $\delta u = y$ Bogen, die ſich in o ſchneiden, ziehe durch o die $\alpha\gamma = \alpha\gamma' = e$, die $\delta\beta = \delta\beta' = f$, und verbinde β, γ durch eine Gerade, ſo leuchtet ein, daß $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez ſeyn müſſe.

6″) a, b, e, f.

NB. Die Summe je zweier der Elemente a, b, f größer als das dritte, und $e > b$, wenn $f <$ oder $= \sqrt{a^2 + b^2}$, $e >$ oder $= h$ (beſtimmbar durch a, b, f), wenn $f > \sqrt{a^2 + b^2}$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. aus $\alpha\delta = a$, $\alpha\beta = b$, $\delta\beta = f$ das Dreieck $\alpha\beta\delta$; ziehe durch β die $\lambda\varkappa \pm \alpha\delta$, und ſchlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in γ ſchneidet, verbinde γ, δ durch eine Gerade, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez. Die Ableitung der Formel für die Möglichkeits-Bedingung hat keine Schwierigkeit.

7) Zwei Seiten, ein Winkel und eine Diagonale.

7′) a, c, α, f.

NB. $f > = a \sin. \alpha$, wenn $\alpha < R$, $f > a$, wenn $\alpha = > R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Conſtr. aus $\alpha\delta = a$, $\delta\beta = f$, Winkel α das Dreieck $\alpha\beta\delta$ nach §. 17. 2″.; ziehe $\beta\varkappa \pm \alpha\delta$, mache $\beta\gamma = c$, und verbinde γ, δ durch eine Gerade, ſo iſt, wie leicht zu erweiſen, $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

7‴) a, b, α, e.

NB. $e > b$, wenn $\alpha <= R$; $e > = b \sin. \alpha$, wenn $\alpha > R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\delta = a$, unter dem Winkel α, die $\alpha\beta = b$; ziehe $\beta\varkappa \pm \alpha\delta$, und ſchlage aus α mit e einen Bogen, der die $\beta\varkappa$ in γ ſchneidet, ziehe $\gamma\delta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

7‴) a, b, δ, e.

Bedingung der Möglichkeit und Conſtruction leicht.

17^{IV}) b, d, α, e.

NB. $d = > b \sin. \alpha$, und $c > b$, wenn $\alpha <= R$, $c > = b \sin. \alpha$, wenn $\alpha > R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Ziehe $\alpha\sigma$ von unbestimmter Länge, lege daran unter dem Winkel α, die $\alpha\beta = b$, und an β die $\beta\eta = d$, die $\beta\varkappa \mp \alpha\sigma$; schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\beta\varkappa$ in γ schneidet, ziehe die $\gamma\delta \mp \beta\eta$, so leuchtet ein, daß $\alpha\beta\gamma\delta$ ein der Aufgabe entsprechendes Trapez seyn müsse.

8) Zwei Seiten, das Abstandsperpendikel der Parallelen und ein Winkel.

8′) a, c, h, α.

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\delta = a$ das Perpendikel $\alpha\varepsilon = h$, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, und an α, unter dem Winkel α, die $\alpha\mu$, wodurch $\varkappa\lambda$ in β geschnitten wird; mache $\beta\gamma = c$ und ziehe $\gamma\delta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

8″) a, b, h, δ.

NB. $b \gtrless h$, wenn $\delta \gtrless R$, oder $\delta < R$ aber a Tg. $\delta > h$ ist.
b größer als das durch a, h, δ bestimmbare f, wenn a Tg. $\alpha < h$ ist.

Aufl. (Fig. 46). Lege unter dem Winkel δ an $\alpha\delta = a$ die $\delta\nu$, errichte auf $\alpha\delta$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon = h$, ziehe durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, wodurch die $\delta\nu$ in γ geschnitten wird; schlage aus α mit b einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in β trifft, ziehe $\alpha\beta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez. Die Ableitung der Formeln für die Möglichkeits-Bedingungen hat keine Schwierigkeit.

9) Zwei Seiten, das Abstandsperpendikel der Parallelen, und eine Diagonale.

9′) a, c, h, e.

NB. $e \gtrless h$.

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\delta = a$ das Perpendikel $\alpha\varepsilon = h$, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in γ schneidet, mache $\gamma\beta = c$, und ziehe $\alpha\beta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das geforderte Trapez.

9″) a, b, h, e.

$b \gtrless h$; $e > b$; in einem Fall auch $< b$, in welchem?

Aufl. (Fig. 46). Constr. $\alpha\delta \mp a$, $\alpha\varepsilon = h$, $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$ wie vorher; schlage aus α mit b und e Bogen, wodurch $\varkappa\lambda$ in β, γ geschnitten wird, ziehe $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

9‴) b, d, h, e.

NB. h nicht größer als die kleinste der Seiten; $e > b$.

Aufl. (Fig. 46). Constr. aus $\alpha\beta = b$, $\beta\eta = d$, $\alpha\varepsilon = h$ das Dreieck $\alpha\beta\eta$ nach §. 17. 3″.; ziehe $\beta\varkappa \mp \alpha\eta$; schlage aus α mit e einen

Bogen, der die $\beta\varkappa$ in γ schneidet, ziehe $\gamma\delta \mp \beta\eta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ ein der Forderung entsprechendes Trapez.

10) Eine Seite, zwei Winkel und eine Diagonale.

10′) a, α, δ, e.

NB. $e > a$, wenn $\alpha + \delta > 2R$, und $\delta = < R$ ist.

$e > = a \cdot \sin. \delta$, wenn $\alpha + \delta > 2R$ und $\delta > R$ ist.

$e > = a \cdot \sin. \delta$ und $< \frac{a \sin. \delta}{\sin. (\alpha + \delta)}$, wenn $\alpha + \delta < 2R$ ist.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\delta = a$, unter den Winkeln α, δ die Geraden $\alpha\mu$, $\delta\nu$; schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\delta\nu$ in γ trifft, ziehe $\gamma\beta \mp \alpha\delta$, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez. Die Ableitung der Formeln für die Möglichkeits-Bedingung geschieht wie unter 5″.

10″) b, α, δ, e.

NB. $e > b$, wenn $\alpha < = R$; $e = > b \sin. \alpha$, wenn $\alpha > R$ ist.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\sigma$, von unbestimmter Länge, die $\alpha\beta = b$ unter dem Winkel α; ziehe durch β die $\varkappa\lambda \mp \alpha\sigma$; schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in γ trifft; ziehe $\gamma\delta$, unter dem Winkel δ gegen $\alpha\sigma$ geneigt, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

11) Eine Seite, zwei Winkel, und das Abstandsperpendikel der parallelen Seiten a, α, δ, h.

NB. $h < \frac{a \cdot \sin. \alpha \cdot \sin. \delta}{\sin. (\alpha + \delta)}$, wenn $\alpha + \delta < 2R$ ist.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\delta = a$, unter den Winkeln α, δ, die Geraden $\alpha\mu$, $\delta\nu$; errichte auf $\alpha\delta$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon = h$; ziehe durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, wodurch $\alpha\mu$, $\delta\nu$ in β, γ so geschnitten werden, daß $\alpha\beta\gamma\delta$ der Forderung genügt.

Die Formel der Möglichkeits-Bedingung ergiebt sich leicht, wenn aus dem Durchschnitt π der convergenten $\alpha\mu$, $\delta\nu$ ein Perpendikel auf $\alpha\delta$ gefällt wird. Dieses Perpendikel ist, einem bekannten Satze der Trigonometrie zufolge, $= \alpha\pi \cdot \sin. \alpha$, oder, weil $\alpha\pi = \frac{a \sin. \delta}{\sin. (\alpha + \delta)}$ ist, $= \frac{a \sin. \alpha \cdot \sin. \delta}{\sin. (\alpha + \delta)}$, woraus obige Bedingungs-Formel hervorgeht, da h offenbar kleiner seyn muß, als die genannte Höhe des Dreiecks $\alpha\pi\delta$, wenn die Construction des verlangten Trapezes möglich bleiben soll.

12) Eine Seite, die beiden Diagonalen, und ein Winkel.

12') a, e, f, α.

NB. $f > a$, wenn $\alpha = > R$; $f > = a \sin. \alpha$, wenn $\alpha < R$ iſt.
$e > = h$ (durch a, α, f beſtimmbar), wenn $\alpha = > R$ iſt.
$e > h$. Coſec. $\alpha = (b)$, wenn $\alpha < R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Lege an $\alpha\delta = a$ die $\alpha\mu$ unter dem Winkel α; ſchlage aus δ mit f einen Bogen, der die $\alpha\mu$ in β trifft; ziehe $\beta\varkappa \mp \alpha\delta$, beſchreibe aus α mit e einen Bogen, welcher die $\beta\varkappa$ in γ ſchneidet, verbinde γ, δ durch eine Gerade, ſo iſt $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

12'') b, e, f, α.

NB. Analog den Bedingungen unter 12'.

Aufl. (Fig. 46). Ziehe $\alpha\beta = b$, lege daran $\alpha\sigma$ unter dem Winkel α, und $\beta\varkappa \mp \alpha\sigma$, ſchlage aus α mit e, aus β mit f Bogen, deren erſterer die $\alpha\sigma$ in δ, letzterer die $\beta\varkappa$ in γ trifft, ziehe $\gamma\delta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das geforderte Trapez.

13) Eine Seite, die beiden Diagonalen, und das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten.

13') a, e, f, h.

NB. $e > = h$; $f > d$ (durch a, e, h beſtimmbar).

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\delta = a$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon = h$, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, ſchlage aus α mit e, aus δ mit f Bogen, von denen erſterer die $\varkappa\lambda$ in γ, letzterer in β trifft; ziehe $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, ſo iſt $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

13'') b, e, f, h.

NB. Analog den Bedingungen unter 13'.

Aufl. (Fig. 46). Ziehe zwei Parallele $\alpha\sigma$, $\lambda\varkappa$, von einander um $\alpha\varepsilon = h$ entfernt; ſchlage zuvörderſt aus α, mit b und e, Bogen, welche die $\lambda\varkappa$ in β und γ treffen, ſodann aus β mit f einen Bogen, der die $\alpha\sigma$ in δ ſchneidet, ziehe $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

14) Eine Seite, eine Diagonale, das Abſtandsperpendikel der parallelen Seiten, und ein Winkel.

14') a, e, h, α.

NB. $e > = h$, wenn $\alpha > R$ iſt.
$e > h$. Coſec. α, wenn $\alpha < = R$ iſt.

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\delta = a$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon = h$, ziehe $\alpha\mu$, unter dem Winkel α gegen $\alpha\delta$ geneigt, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$,

wodurch $\alpha\mu$ in β geschnitten wird; schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in γ schneidet; ziehe $\gamma\delta$, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez, wie leicht zu beweisen ist.

14″) d, e, h, α.

NB. h darf nicht größer seyn, als das kleinste der Elemente d, e (vergleiche §. 17. 3″).

$\alpha >$ als der durch d, e, h bestimmbare Winkel $\gamma\alpha\delta$.

Aufl. (Fig. 46). Constr. nach §. 17. 3″. aus h, e, d das Dreieck $\alpha\gamma\delta$, lege durch γ die $\varkappa\lambda \mp \alpha\delta$, und an $\alpha\delta$ unter dem Winkel α die $\alpha\mu$, wodurch $\varkappa\lambda$ in β dergestalt geschnitten wird, daß $\alpha\beta\gamma\delta$ der Forderung entspricht.

15) Zwei Winkel, eine Diagonale, und das Abstandsperpendikel der parallelen Seiten, α, δ, e, h.

NB. e $>$ h . Cosec. α und $>$ h Cosec. δ, oder?

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\sigma$ das Perpendikel $\alpha\varepsilon =$ h, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\sigma$; an $\alpha\sigma$ unter dem Winkel α die $\alpha\mu$, wodurch $\varkappa\lambda$ in β geschnitten wird. Schlage aus α mit e einen Bogen, der die $\varkappa\lambda$ in γ trifft; ziehe $\gamma\delta$, unter dem Winkel δ gegen $\alpha\sigma$ geneigt, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Trapez.

16) Die beiden Diagonalen, ein Winkel, und das Abstandsperpendikel der parallelen Seiten e, f, α, h.

NB. e $>$ = h, wenn $\alpha >$ R; e $>$ h . Cosec. α, wenn $\alpha <$ = R.

f $>$ h . Cosec. α, wenn $\alpha >$ = R; f $>$ = h, wenn $\alpha <$ R ist.

Aufl. (Fig. 46). Errichte auf $\alpha\sigma$ die Senkrechte $\alpha\varepsilon =$ h, lege durch ε die $\varkappa\lambda \mp \alpha\sigma$, und an $\alpha\sigma$ die $\alpha\mu$ unter dem Winkel α, wodurch $\varkappa\lambda$ in β geschnitten wird, schlage aus α mit e, aus β mit f Bogen, deren ersterer die $\varkappa\lambda$ in γ, letzterer die $\alpha\sigma$ in δ trifft; ziehe $\gamma\delta$, so ist offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das geforderte Trapez.

γ) Construction eines Vierecks überhaupt nach fünf Bestimmungs-Elementen.

NB. Der Kürze wegen sollen in §. 20. bezeichnet werden (Fig. 48.):

1) Die vier Winkel des verlangten Vierecks durch . . . . . α, β, γ, δ.
2) Die vier Seiten $\delta\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ durch . . . . . a, b, c, d.
3) Die beiden Diagonalen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ durch . . . . . e, f.

§. 20. Aufg. Zur Verzeichnung eines Vierecks sind von den genannten Bestimmungs-Elementen gegeben:

1) Die vier Seiten und ein Winkel, a, b, c, d, α.

NB. $c+d >$, $c-d <$ als das durch a, b, α beſtimmbare f.

Aufl. (Fig. 48). Conſtr. nach §. 17. 2′. aus $\alpha\delta = a$, $\alpha\beta = b$ und Winkel α das Dreieck $\alpha\beta\delta$, wodurch $\beta\delta = f$ gefunden wird; ſodann nach §. 17. 1. aus $\beta\delta = f$, $\beta\gamma = c$, $\gamma\delta = d$ das Dreieck $\beta\gamma\delta$, ſo iſt $\alpha\beta\gamma\delta$ ein der Forderung entſprechendes Viereck.

2) Drei Seiten und zwei Winkel.

2′) a, b, c, α, β.

NB. Iſt $\alpha+\beta < 2R$, ſo darf a nicht $= \frac{b \sin. \beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, und c nicht $= \frac{b \sin. \alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}$ ſeyn.

Iſt $a < \frac{b \sin. \beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, ſo kann $c <$ oder $> \frac{b \sin. \alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}$ ſeyn.

Iſt $a > \frac{b \sin. \beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, ſo muß $c < \frac{b \sin. \alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}$ ſeyn.

Aufl. (Fig. 48). Lege an $\alpha\beta = b$ die $\alpha\delta = a$ unter dem Winkel α, die $\beta\gamma = c$ unter dem Winkel β; ziehe $\gamma\delta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Viereck.

Die Richtigkeit der Formeln für die Möglichkeits-Bedingung ergiebt ſich leicht, wenn die convergenten $\beta\gamma$, $\alpha\delta$ bis zur Schneidung in ϑ verlängert werden, wodurch man, mittelſt eines bekannten trigonometriſchen Satzes, erhält:

$\alpha\vartheta = \frac{b \sin. \beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, $\beta\vartheta = \frac{b \sin. \alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}$, und demgemäß erkennt, daß weder a dem $\alpha\vartheta$, noch c dem $\beta\vartheta$ gleich ſeyn dürfe, wenn durch Ziehung der $\gamma\delta = d$ ein Viereck entſtehen ſoll. Wohl aber dürfen a, c kleiner, oder die eine kleiner und die andere größer ſeyn, als die genannten Geraden.

2″) a, b, c, α, γ.

NB. Die durch a, b, α beſtimmbare Diagonale $f > c$.

Aufl. (Fig. 48). Conſtr. nach §. 17. 2′. aus $\alpha\delta = a$, $\alpha\beta = b$ und Winkel α das Dreieck $\alpha\beta\delta$, wodurch $\beta\delta = f$ gefunden wird. Lege an $\beta\delta$ die $\delta\tau$ unter dem Winkel γ, und conſtruire nach §. 16. 8. über $\beta\delta$ als Sehne einen Kreis, ſo daß $\delta\tau$ eine Tangente wird. Trage $\beta\gamma = c$ als Sehne in dieſen Kreis, und ziehe $\gamma\delta$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Viereck.

2‴) a, b, c, α, δ.

NB. c muß $> = f \cdot \sin.(\delta - \delta')$ ſeyn, wenn das Viereck möglich bleiben ſoll

Aufl. (Fig. 48). Conſtr. nach §. 17. 2′. aus $\alpha\delta = a$, $\alpha\beta = b$, und Winkel α das Dreieck $\alpha\beta\delta$, ſo iſt $\beta\delta = f$, und Winkel $\alpha\delta\beta = \delta'$

beſtimmt. Lege an $\delta\alpha$ unter dem Winkel δ die $\delta\nu$ von unbeſtimmter Länge, ſchlage aus β mit c einen Bogen, der die $\delta\nu$ in γ berührend oder ſchneidend trifft, und ziehe $\gamma\delta$, ſo entſpricht das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ der Forderung.

2^{IV}) a, b, c, γ, δ.

NB. b muß $\geqq$ a . Sin. δ — c . Sin. γ ſeyn.

Aufl. (Fig. 48). Lege an $\alpha\delta = a$ die $\delta\nu$ unter dem Winkel δ; an einen beliebigen Punkt $\varkappa$ der $\delta\nu$ die $\varkappa\lambda = c$, ſo daß der Winkel $\delta\varkappa\lambda = \gamma$ wird; ziehe $\lambda\mu \mp \delta\nu$, ſchlage aus α mit b einen Bogen, der die $\lambda\mu$ in β trifft; ziehe $\alpha\beta$, und aus β die $\beta\gamma \mp \varkappa\lambda$, ſo iſt offenbar $\alpha\beta\gamma\delta$ das verlangte Viereck.

3) Zwei Seiten und drei Winkel.

3′) a, b, α, β, γ, folglich auch δ.

Auflöſung nebſt Bedingung der Möglichkeit leicht zu finden.

3″) a, c, α, β, γ, folglich auch δ.

Auflöſung und Bedingung der Möglichkeit analog denen unter 2^{IV}.

Anmerkung: Die Diagonalen e, f ſind hier, der Kürze wegen, als Beſtimmungs-Elemente außer Acht gelaſſen.

) Conſtruction eines Vielecks nach gegebenen Bedingungen.

NB. Der Kürze wegen ſollen in dem als Fünfeck vorgeſtellten Vieleck nach Fig. 49. bezeichnet werden:

1) Die Winkel durch . . . . . , α, β, γ, δ, ε.

2) Die Seiten $\varkappa$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$ durch . . . . . a, b, c, d, e.

§. 21. Aufg. (Fig. 49). Zur Abtragung eines Vielecks ſind gegeben:

1) Alle Seiten und alle Winkel weniger drei.

Für das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 49.):

1′) a, b, c, d, e, α, β.

Aufl. §. 20. 2′., §. 17. 1.

1″) a, b, c, d, e, α, γ.

Aufl. §. 17. 2′., §. 17. 1.

2) Alle Seiten weniger eine, und alle Winkel weniger zwei.

Für das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 49.):

2′) a, b, c, d, α, β, γ.

Aufl. §. 20. 2′., §. 17. 2′.

2″) a, b, c, d, α, β, δ.

Aufl. §. 20. 2′. §. 17. 2″.

$2'''$) a, b, c, d, α, β, ε.
Aufl. §. 20. $2'$., §. 17. $2''$.
2^{IV}) a, b, c, d, α, γ, δ.
Aufl. §. 17. $2'$., §. 20. $2''$.
2^{V}) a, b, c, d, α, δ, ε.
Aufl. §. 17. $2'$., §. 20. 2^{IV}.
2^{VI}) a, b, c, d, β, δ, ε.
Aufl. §. 17. $2'$., §. 20. 2^{IV}.

3) Alle Seiten weniger zwei, und alle Winkel weniger einen.
Für das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 49.):
$3'$) a, b, c, α, β, γ, δ, folglich auch ε.
Aufl. §. 17. $2'$., §. 20. $3'$.
$3''$) a, b, d, α, β, γ, δ, folglich auch ε.
Aufl. §. 17. $2'$., §. 20. $3''$.

4) Die Geraden, welche von einem beliebigen Punkt o nach den Winkelspitzen der Figur gezogen sind, nebst den von denselben eingeschlossenen Winkeln.
Für das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 49.):
$o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$, $o\delta$, $o\varepsilon$; η, ϑ, $\varkappa$, λ.
Aufl. §. 17. $2'$.
NB. Der Punkt o kann auch in einer Winkelspitze, oder in in einer Seite, oder auch innerhalb der Figur angenommen werden.
Wie ändern sich obige Data nach dieser Annahme?

5) Sämmtliche Perpendikel, welche aus den Winkelspitzen der Figur auf eine beliebige Standlinie AB gefällt worden, nebst den Abständen dieser Perpendikel auf der Standlinie.
Für das Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 49.):
$\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$.
$\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$.
Aufl. leicht.
NB. Zur Standlinie kann auch eine Seite oder eine Diagonale der Figur gewählt werden, wodurch stets zwei der Perpendikel in Null übergehen.

Anmerkung: Die Anführung und Auseinandersetzung sonstiger Methoden zur Abtragung gegebener Figuren, wie sie wohl in der Praxis gebräuchlich sind (mittelst der Punktirnadel, des Gitter-Quadrats ꝛc.), bleibt dem Lehrer überlassen. — Die Construction regulärer Figuren ist in der Abtheilung III. §. 168. §. 169. abgehandelt.

Zweite Abtheilung.

Verwandlung geometrischer Figuren.

Erster Abschnitt.

Verwandlung einer Figur in eine andere von gleichem Flächen-Inhalt.

I. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur.

A. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

a) Verwandlung eines N-ecks in ein N-eck.

α) Verwandlung eines Dreiecks in ein Dreieck nach gegebenen Bedingungen.

NB. In dieſer Abtheilung ſollen ſtets bezeichnet werden (Fig. 36):
1) Die drei Winkel des zu verwandelnden Dreiecks durch . . . . . α, β, γ.
2) Die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ durch a, b, c.
3) Die den Seiten a, b, c zugehörigen Höhen $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\varphi$ durch . . d, e, f.
4) Jede Quantitäts-Abänderung eines Elements durch Beſtrichelung des demſelben entſprechenden Buchſtaben-Symbols; die bekannte Abänderung durch Beifügung eines Strichs, die unbekannte durch Beifügung zweier Striche.

§. 22. Aufg. Ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in ein anderes von gleichem Flächen-Inhalte zu verwandeln, durch Quantitäts-Aenderung:

1) Eines Winkels β in β'.

Aufl. (Fig. 50). Lege durch α die $\sigma\tau \mathrel{\dot{=}} \beta\gamma$; an β die $\beta\varrho$, unter dem Winkel β' gegen $\gamma\beta$ geneigt, wodurch die $\sigma\tau$ in η geſchnitten wird. Ziehe $\beta\eta$, $\gamma\eta$, ſo iſt offenbar $\beta\eta\gamma$ das verlangte Dreieck.

2) Einer Seite c in c'.

Aufl. 1. (Fig. 50., Fig. 51., jenachdem $c' <$ oder $> c$ iſt). »Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten ſich wie die Produkte der, denſelben einſchließenden Seiten.« — Es ergiebt ſich demnach, wenn β beiden Dreiecken gemeinſchaftlich bleibt, $a''c' = ac$, alſo $a'' = \frac{ac}{c'}$, woraus nach §. 15. 1. folgende Conſtruction entſpringt:

Lege auf c die $\beta\vartheta = c'$, ziehe $\vartheta\gamma$, und aus α die $\alpha x \mathrel{\dot{=}} \vartheta\gamma$; ver-

binde ϑ, $\varkappa$ durch eine Gerade, ſo iſt offenbar $\alpha\varkappa = a''$, und $\beta\vartheta\varkappa$ das der Forderung entſprechende Dreieck.

Aufl. 2. (Fig. 51). Iſt $c' =$ oder $> d$, ſo lege durch α die Gerade $\sigma\tau \mp \beta\gamma$, ſchlage aus β mit c' einen Bogen, der die $\sigma\tau$ entweder in λ berührt, oder in μ, ν ſchneidet (jenachdem $c' =$ oder $> d$ iſt). Verbinde λ, μ, ν mit β, γ durch Gerade, ſo leuchtet ein, daß der Forderung Genüge geſchieht, im erſtern Falle durch das Dreieck $\beta\lambda\gamma$, im letztern durch die Dreiecke $\beta\mu\gamma$, $\beta\nu\gamma$.

3) Einer Höhe d in d′.

Aufl. 1. (Fig. 50., Fig. 51., jenachdem $d' <$ oder $> d$ iſt). Der Bedingung gemäß entſteht die Grundgleichung: $a''d' = ad$, oder, mit Beibehaltung des Winkels β, in welchem Falle $d : d' = c : c'$, alſo c' beſtimmt iſt. $a''c' = ac$, wodurch, ſobald c' gefunden, die weitere Ausführung der Conſtruction auf 2. Aufl. 1. reduzirt wird. Man findet aber $\beta\vartheta = c'$, wenn auf $\beta\gamma$ die Senkrechte $\beta\lambda' = d'$ errichtet, und aus λ' die $\lambda'\vartheta \mp \beta\gamma$ gezogen wird.

Aufl. 2. (Fig. 52., Fig. 53., jenachdem $d' <$ oder $> d$ iſt). Ziehe die Höhe $\alpha\delta = d$, miß darauf ab $\delta\vartheta = d'$, und verwandle nach 2. Aufl. 1. das Dreieck $\delta\alpha\beta$ in $\delta\vartheta\mu$, das Dreieck $\delta\alpha\gamma$ in $\delta\vartheta\nu$, ſo iſt klar, daß $\mu\vartheta\nu$ den Bedingungen der Aufgabe entſprechen müſſe.

4) Eines Winkels und einer Seite.

4′) β in β', und c in c'.

Aufl. Nach 1. und 2.

4″) β in β' und b in b′

NB. $\frac{be}{b'} = e' <$ oder $= \frac{1}{2}b'$ (Cotg. β' + Coſec. β').

Aufl. (Fig. 54). Es ſey nach 2. das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ verwandelt in $\vartheta\varkappa\gamma$ mit der Seite $\gamma\vartheta = b'$. Lege durch $\varkappa$ die $\sigma\tau \mp \gamma\vartheta$, an γ die Gerade $\gamma\psi$, unter dem Winkel β' gegen $\gamma\vartheta$ geneigt, und beſchreibe über $\gamma\vartheta$ als Sehne und $\gamma\psi$ als Tangente einen Kreis (§. 16. 8.), welcher die $\sigma\tau$ entweder berührt (wenn $e' = \frac{1}{2}b'$ (Cotg. β' + Coſec. β') iſt), oder in μ, ν, den dritten Winkelſpitzen der geſuchten Dreiecke $\gamma\vartheta\mu$, $\gamma\vartheta\nu$, ſchneidet (wenn $e' <$ als vorſtehende trigonometriſche Funktion iſt), wie dies unmittelbar einleuchtet. — Auch ergiebt ſich leicht, daß obiger trigonometriſcher Ausdruck die analytiſche Form des, auf der Mitte von $\gamma\vartheta = b'$ errichteten, und bis an die Peripherie verlängerten, Perpendikels vorſtellt.

5) Eines Winkels und einer Höhe.

5′) β in β', und d in d′.

Aufl. Nach 3. und 1.

5″) β in β' und e in e′.

Aufl. Nach 4″., wenn zuvor die Verwandlung des e in e′, alſo auch des b in b′ bewerkſtelligt wird.

6) Einer Seite und einer Höhe. c in c′ und d in d′.

NB. c′ > oder = d′.

Aufl. Nach 3. und 2.

7) Zweier Winkel.

7′) β, γ in β', γ'.

Aufl. (Fig. 55., Fig. 56). Conſtruire über a, durch Anlegung der Winkel β', γ', das Dreieck $\beta\mu\gamma$. Ziehe $\alpha\eta \pm \beta\gamma$, und verbinde η mit γ durch eine Gerade, ſo entſteht nach 1. das dem Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ gleiche Dreieck $\beta\eta\gamma$, mit dem Winkel β', und es verhält ſich, wegen der gemeinſchaftlichen Höhe der Grundlinien $\beta\eta = g$, $\beta\mu = g'$:

Dr. $\beta\eta\gamma$: Dr. $\beta\mu\gamma = g : g'$ (1).

Das geſuchte Dreieck $\beta\lambda\varkappa$ muß aber dem Dreiecke $\beta\eta\gamma$ gleich, und dem Dreieck $\beta\mu\gamma$ ähnlich werden, wodurch, wenn $\beta\varkappa = a''$ geſetzt wird, folgende Proportion entſpringt:

Dr. $\beta\lambda\varkappa$: Dr. $\beta\mu\gamma = a''^2 : a^2$ (2).,

alſo auch, weil (1). = (2). iſt:

$$a''^2 : a^2 = g : g', \text{ oder } a'' = \sqrt{\frac{ag}{g'}} \cdot a \quad (3).$$

eine Formel, welche ſich leicht auf nachſtehende Weiſe conſtruiren läßt. Ziehe aus η die $\eta\nu \pm \mu\gamma$, wodurch $\beta\nu = \frac{ag}{g'}$ wird (§. 15. 1). Beſchreibe über der größern der beiden Geraden $\beta\gamma$, $\beta\nu$ einen Halbkreis, errichte im Endpunkte der kleinern ein bis an die Peripherie in ϑ verlängertes Perpendikel; ziehe die Sehne $\beta\vartheta$, ſo iſt dieſe:

$$\beta\vartheta = \sqrt{\frac{ag}{g'}} \cdot a = a'' \quad (\S.\ 15.\ 9).$$

Schlage aus β mit $\beta\vartheta$ einen Bogen, der die $\beta\gamma$ in $\varkappa$ ſchneidet; ziehe $\varkappa\lambda \pm \gamma\mu$, ſo leuchtet ein, daß $\beta\varkappa\lambda$ das verlangte Dreieck ſeyn müſſe, weil $\beta\varkappa = \beta\vartheta = a''$ iſt.

7″) β, γ in $\beta' = \gamma' = \frac{1}{2}R$, d. h.?

Aufl. Wie unter 7′. Es entſteht hierbei die Vereinfachung, daß $\beta\mu = g' = a$, folglich:

$a'' = \sqrt{ag}$ wird.

8) Zweier Seiten.

8′) b, c in zwei gleiche, mit Beibehaltung der Höhe d, d. h.?

Aufl. leicht.

8″) b, c in b′, c′.

NB. $b'c' >$ oder $=$ cf.

Aufl. Nach 2.

9) Zweier Höhen e, f in e′, f′.

NB. $e'f' <$ oder $=$ be.

Aufl. Verwandle nach 3. die c in e′, wodurch b′ gefunden wird. Lege durch die gegenüberſtehende Winkelſpitze des b′ eine Gerade, parallel zu b′; ſchlage über b′ einen Halbkreis, trage aus einem Endpunkte des b′ die Höhe f′ als Sehne in denſelben, und verbinde die übrigen Endpunkte des b′ und f′ durch eine Gerade, deren Richtung die dritte Winkelſpitze des geſuchten Dreiecks, in der zu b′ gezogenen Parallelen, beſtimmt, wie dies leicht erhellt.

β) Verwandlung eines Vierecks in ein Viereck.

αα) Von derselben Art.

ααα) Verwandlung eines Parallelogramms in ein Parallelogramm nach gegebenen Bedingungen.

NB. In dieser Abtheilung sollen stets bezeichnet werden (Fig. 41.):
1) Die vier Winkel des zu verwandelnden Parallelogr. durch . . $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
2) Die vier Seiten $\delta\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ durch . . . . . a, b, a, b.
3) Die beiden Diagonalen $\alpha\gamma, \beta\delta$ durch . . . . . e, f.
4) Die beiden Abstandsperpendikel $\varkappa, \varkappa\varkappa$ der parallelen Seiten durch h, k.
5) Jede Quantitäts-Aenderung eines Elements durch Bestrichelung des demselben entsprechenden Buchstaben-Symbols; die bekannte Aenderung durch Beifügung eines Strichs, die unbekannte durch Beifügung zweier Striche.

§. 23. **Aufg.** Ein Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein anderes, von gleichem Flächeninhalte, zu verwandeln, durch Quantitäts-Aenderung:

1) Eines Winkels, α in α'.

Aufl. leicht.

2) Einer Seite, b in b′.

Aufl. Verwandle nach §. 22. 2. das Diagonal-Dreieck $\delta\alpha\beta$ in ein anderes mit der Seite b′, und ergänze dasselbe zum Parallelogramm durch Ziehung zweier Geraden, parallel den Seiten b′, a′. — Die Construction wird vereinfacht, wenn $b' >$ oder $= h$ ist.

3) Einer Diagonale, e in e′.

Aufl. 1. Trage e′ auf e, und verwandle, nach §. 22. 2. Aufl. 1., eins der Diagonal-Dreiecke, etwa $\alpha\delta\gamma$, in ein anderes mit der Seite e′, und ergänze das gefundene Dreieck dergestalt zum Parallelogramm, daß e′ Diagonale wird.

Aufl. 2. Ist $e' >$ oder $= h$, so kann die angeführte Verwandlung des Dreiecks $\alpha\delta\gamma$ leichter nach §. 22. 2. Aufl. 2. bewerkstelligt werden.

4) Eines Abstandsperpendikels, h in h′.

Aufl. Man erhält der Bedingung gemäß $a''h' = ah$, oder, wenn der Winkel α unverändert bleibt, in welchem Falle $h : h' = b : b'$, also b′ bestimmt ist, $a''b' = ab$, wodurch die Construction auf 2. zurückgeführt wird.

5) Eines Winkels und einer Seite, α in α' und b in b′.

Aufl. Nach 1. und 2. — auch mittelst des bekannten Satzes über die Complemente eines Parallelogr.

6) Eines Winkels, und einer Diagonale.

6′) α in α', und f in f′.

Aufl. Bedingung der Möglichkeit und Conſtruction des zu verwandelnden Diagonal-Dreiecks $\delta\alpha\beta$ in ein anderes mit der Seite f′, und dem Winkel α' nach §. 22. 4″.; ſodann die nöthige Ergänzung des gefundenen Dreiecks zum Parallelogr., ſo daß f′ Diagonale wird.

6″) α in α', und e in e′.

Aufl. wie unter 6′. in Beziehung auf das Diagonal-Dreieck $\alpha\delta\gamma$, welches in ein anderes nach §. 22. 4″. zu verwandeln iſt, worin e′ als Seite, und $\delta' = 2R - \alpha'$ als Winkel vorkommt.

7) Eines Winkels und eines Abſtandsperpendikels, α in α', und h in h′.

Aufl. Nach 4. und 1.

8) Einer Seite und einer Diagonale, b in b′ und e in e′.

Aufl. Bedingung der Möglichkeit, und Verwandlung des Diagonal-Dreiecks $\alpha\delta\gamma$ in ein anderes mit den Seiten e′, b′ nach §. 22. 8″., ſodann die nöthige Ergänzung des gefundenen Dreiecks zum Parallelogramm, daß e′ Diagonale wird.

9) Einer Seite und eines Abſtandsperpendikels, b in b′ und h in h′.

NB. b′ > oder = h′.

Aufl. Nach 4. und 2. Aufl. 2.

10) Einer Diagonale und eines Abſtandsperpendikels, e in e′ und h in h′.

NB. e′ > oder = h′.

Aufl. Nach 4. und 3. Aufl. 2.

11) Zweier Seiten.

11′) a, b in zwei gleiche, ſo daß $\alpha\beta\gamma\delta$ gleichſeitig wird.

Aufl. Nach §. 22. 8′.

11″) a, b in a′, b′.

Aufl. Bedingung der Möglichkeit und Verwandlung des Diagonal-Dreiecks $\delta\alpha\beta$ in ein anderes mit den Seiten a′, b′ nach §. 22. 8″., ſodann die Ergänzung des gefundenen Dreiecks zum Parallelogramm durch Ziehung zweier Geraden, parallel den Seiten a′, b′.

12) Beider Diagonalen, e, f in e′, f′.

Aufl. (Fig. 41). Bedingung der Möglichkeit und Verwandlung des Dreiecks $\alpha o\delta$ in ein anderes, ſo daß $\alpha o = \frac{1}{2}e$ in $\frac{1}{2}e'$, $\beta o = \frac{1}{2}f$ in $\frac{1}{2}f'$ übergeht, nach §. 22. 8‴. Darauf die nöthige Ergänzung des gefundenen Dreiecks zum Parallelogr. durch Verlängerung der Halbdiagonalen.

13) Beider Abſtandsperpendikel, h in h′ und k in k′.

Aufl. Bedingung der Möglichkeit und Verwandlung des Diagonal-Dreiecks $\delta\alpha\beta$ in ein anderes mit den Höhen h', k' nach §. 22. 9. ferner die nöthige Ergänzung des gefundenen Dreiecks zum Parallelogr. nach bekannter Methode.

βββ) Verwandlung eines Trapezes in ein Trapez nach gegebenen Bedingungen.

NB. In dieſer Abtheilung ſollen ſtets bezeichnet werden (Fig. 45.):

1) Die vier Winkel des zu verwandelnden Trapezes durch . . . . α, β, γ, δ.
2) Die beiden parallelen Seiten $\delta\alpha$, $\beta\gamma$ durch . . . . . a, c.
3) Die beiden nicht parallelen Seiten $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ durch . . . . . b, d.
4) Die beiden Diagonalen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ durch . . . . . e, f.
5) Das Abſtandsperpendikel „ der parallelen Seiten durch . . . h.
6) Jede Quantitäts-Aenderung eines Elements durch Beſtrichelung des demſelben entſprechenden Buchſtaben-Symbols; die bekannte Aenderung durch Beifügung eines Strichs, die unbekannte durch Beifügung zweier Striche.

§. 24. Aufg. Ein Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein anderes, von gleichem Flächeninhalte, zu verwandeln, durch Quantitäts-Aenderung:

1) Eines Winkels, α in α'.

Aufl. leicht.

2) Einer Seite.

2′) a in a'.

Aufl. 1., wenn $a' < a + c$ iſt, alſo h beibehalten werden kann:
Es entſteht die Grundgleichung: $(a' + c'')\,h = (a + c)\,h$, alſo $c'' = a + c - a'$, ein Ausdruck, deſſen Conſtruction in die Augen ſpringt.

Aufl. 2., wenn $a' >$ oder $<$ oder $= a + c$ iſt:
Wähle c' beliebig, und bilde, der Bedingung gemäß, folgende Grundgleichung:
$(a' + c')\,h'' = (a + c)\,h$ (1)., oder, wenn der Winkel α unverändert bleibt, in welchem Falle $h : h'' = b : b''$ iſt:
$(a' + c')b'' = (a + c)b$ (2)., woraus folgt:

$h'' = \frac{(a+c)h}{(a'+c')}$ (1′)., und $b'' = \frac{(a+c)b}{(a'+c')}$ (2′)., oder auch

$\frac{1}{2}h'' = \frac{\frac{1}{2}(a+c)\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}(a'+c')}$ (1″)., und $\frac{1}{2}b'' = \frac{\frac{1}{2}(a+c).\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}(a'+c')}$ (2″).

Conſtr. der Formel (2″). (Fig. 57.):
Halbire $\alpha\beta$ in η, $\gamma\delta$ in ϑ, und ziehe $\eta\vartheta = \frac{1}{2}(a + c)$. Trage ab auf $\eta\vartheta$ die $\eta\varkappa = \frac{1}{2}(a' + c')$, ziehe $\varkappa\beta$, und aus ϑ die $\vartheta\nu \mp \varkappa\beta$, ſo entſteht:

$$\eta\nu = \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}(a' + c')} = \frac{1}{2}b''$$ (§. 15. 1).

Mache $\eta\mu = \eta\nu$, ziehe aus μ, ν die $\mu\tau$, $\nu\Phi$, beide parallel der $\eta\vartheta$. Trage auf $\mu\tau$ ab die $\mu\sigma = a'$, und verbinde σ, $\varkappa$ durch eine, bis an $\nu\Phi$ verlängerte Gerade $\sigma\varrho$, ſo leuchtet ohne Schwierigkeit ein, daß $\mu\nu\varrho\sigma$ das verlangte Trapez ſeyn müſſe.

NB. Aehnliche Conſtructionen entſpringen aus den drei übrigen Formeln.

2′) b in b′.

Aufl. 1. (wenn $b' >$ oder $= h$ iſt) leicht.

Aufl. 2. (wenn $b' < = > h$ iſt). Aus $\alpha'' = \alpha$ entſpringt die Grundgleichung:

$(a'' + c'')b' = (a + c)b$, alſo

$a'' + c'' = \frac{(a + c)b}{b'}$ (1)., oder, wenn durch 2 dividirt wird:

$\frac{a'' + c''}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b'}$ (1′).

Conſtr. der Formel (1′). (Fig. 57.):
Halbire $\alpha\beta$ in η, $\gamma\delta$ in ϑ, und ziehe $\eta\vartheta = \frac{1}{2}(a + c)$. Mache $\eta\mu = \eta\nu = \frac{1}{2}b'$; ziehe $\nu\vartheta$, und aus β gegen $\eta\vartheta$ die $\beta\varkappa \mp \nu\vartheta$, wodurch entſteht:

$$\eta\varkappa = \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b'} = \frac{a'' + c''}{2}$$ (§. 15. 1).

Lege durch μ, ν die Geraden $\mu\tau$, $\nu\Phi$, beide parallel der $\eta\vartheta$, und durch $\varkappa$ eine dritte Gerade, welche zwei Punkte der erſtern, etwa ϱ, σ, dergeſtalt verbindet, daß $\mu\sigma$, $\nu\varrho$ reelle Werthe erhalten, wodurch dann $\mu\nu\varrho\sigma$ als ein der Forderung entſprechendes Trapez hervorgeht, wie ſich dies leicht darthun läßt.

NB. Wegen der unbeſtimmten Richtung der Geraden $\sigma\varrho$ können unzählige Trapeze gebildet werden, welche der Aufgabe genügen.

3) Des Abſtandsperpendikels der parallelen Seiten, h in h′.

Aufl. Setze $\alpha'' = \alpha$, ſo ergiebt ſich $h : h' = b : b'$, wodurch die weitere Löſung auf 2″. Aufl. 2. zurückgeführt iſt.

4) Zweier Winkel, α, δ in α', δ'.

Aufl. (Fig. 58). Lege durch η, ϑ die Mittelpunkte der $\alpha\beta$, $\delta\gamma$, zwei Gerade, unter den Winkeln α', δ' gegen $\alpha\delta$ geneigt, wodurch die Parallelen $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ dergeſtalt in μ, ν, σ, ϱ geſchnitten werden, daß ein der Forderung genügendes Trapez $\mu\nu\varrho\sigma$ entſteht, wie leicht zu erweiſen iſt.

NB. Sollten ſich $\mu\nu$, $\sigma\varrho$ vor Erreichung der $\beta\gamma$ oder $\alpha\delta$ ſchneiden, ſo verkleinere nach 3. des urſprünglichen Trapezes Abſtandsperpendikel h dergeſtalt, daß der Schneidungspunkt der genannten Geraden außerhalb der Parallelen zu liegen kommt.

Wäre $\alpha' + \delta' = 2R$, ſo entſtände ein Parallelogramm.

5) Eines Winkels und einer Seite.

5′) α in α', und a in a′.

Aufl. Nach 2′. und 1.

5″) α in α', und b in b′.

Aufl. Nach 1. und 2″.

5‴) α in α', und d in d′.

Aufl. (Fig. 58). Halbire $\alpha\beta$ in η, und $\delta\gamma$ in ϑ. Lege durch η die $\mu\nu$, unter dem Winkel α' gegen $\alpha\delta$ geneigt, und ſchlage aus ϑ mit $\frac{1}{2}$d Bogen, durch welche die Parallelen in σ, ϱ geſchnitten werden. Ziehe $\sigma\varrho$, ſo iſt offenbar $\mu\nu\varrho\sigma$ das verlangte Trapez.

NB. In welchen Fällen muß das h des urſprünglichen Trapezes nach 3. verändert werden, wenn die Conſtruction ſoll ausführbar bleiben?

6) Eines Winkels, und des Abſtandsperpendikels der parallelen Seiten.

α in α' und h in h′.

Aufl. Nach 3. und 1.

7) Zweier Seiten.

7′) a, c in a′, c′.

Aufl. Ableitung der Formeln, nebſt Conſtruction derſelben wie unter 2′., wo c′ beliebig gewählt wurde.

7″) a, b in a′, b′.

Aufl. Aus $\alpha'' = \alpha$ entſpringt die Grundgleichung $(a' + c'')b' = (a + c)b$, alſo

$$a' + c'' = \frac{(a+c)b}{b'} \quad (1).,\ \text{oder}$$

$$\frac{a' + c''}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b'} \quad (1').,$$ woraus folgt, daß, wenn die Erfüllung der Bedingung möglich ſeyn ſoll, c″ poſitiv ausfallen, d. h. $\frac{(a+c)b}{b'} > a'$ ſeyn müſſe.

Conſtr. der Formel (1'). (Fig. 57). Man erhält offenbar, wie unter 2''., das Trapez $\mu\nu\varrho\sigma$ nach dem dort angegebenen Conſtructions-Verfahren, nur mit der unweſentlichen Abänderung, daß μ nicht beliebig gewählt werden dürfe, ſondern gleich a' geſetzt werden müſſe, wodurch $\nu\varrho = c''$ wird.

7''') b, d in b', d'.

Aufl. (Fig. 59). Conſtruire auf $\alpha\delta = a$, aus $\alpha\mu = b'$, $\vartheta\mu = d'$, und einer gewählten Seite $\alpha\vartheta = g$, das Dreieck $\alpha\mu\vartheta$, wo g jedoch ſo zu wählen, daß der Inhalt des Dreiecks kleiner wird, als der des gegebenen Trapezes.

Lege durch μ die $\mu\tau \pm \alpha\delta$, und ergänze das Dreieck zum geforderten Trapez $\alpha\mu\varrho\sigma$, mittelſt des Parallelogramms $\vartheta\mu\varrho\sigma$, wodurch offenbar der Bedingung Genüge geſchieht, weil $\alpha\mu = b'$, und $\varrho\sigma = \vartheta\mu = d'$ iſt. Um dies bewerkſtelligen zu können, ſetze die aus μ gefällte Höhe des neuen Trapezes $= h'$, die unbekannte Seite des Ergänzungs-Parallelogramms $= c''$, wodurch $\alpha\sigma = g + c''$, und $\alpha\sigma + \mu\varrho = g + c'' + c'' = g + 2c''$ wird. Es ergiebt ſich demnach die Grundgleichung:

$(g + 2c'')h' = (a + c)h$, oder, wenn $\alpha\nu$ (welches auch größer ſeyn kann als $\alpha\mu$) durch n bezeichnet wird,

$(g + 2c'')b' = (a + c)n$, weil $h : h' = \alpha\mu : \alpha\nu = b' : n$ iſt:

woraus offenbar folgt:

$$g + 2c'' = \frac{(a + c)n}{b'} \quad (1).$$

Conſtruction dieſer Formel. Mache $\delta\varkappa = \beta\gamma = c$, alſo $\alpha\varkappa = a + c$; ziehe $\mu\varkappa$, und aus ν gegen $\alpha\varkappa$ die $\nu\lambda \pm \mu\varkappa$, ſo entſteht:

$$\alpha\lambda = \frac{(a + c)n}{b'} = g + 2c'' \text{ (§. 15. 1.), folglich:}$$

$\vartheta\lambda = \alpha\lambda - \alpha\vartheta = 2c''$.

Halbire $\vartheta\lambda$ in σ und ziehe durch σ die $\sigma\varrho \pm \vartheta\mu$, ſo leuchtet ein, daß $\alpha\mu\varrho\sigma$ das verlangte Trapez ſeyn müſſe.

8) Einer Seite und des Abſtandsperpendikels.

8') a in a', und h in h'.

NB. $a' < \frac{(a + c)h}{h'}$.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung: $(a' + c'')h' = (a + c)h$, alſo

$$a' + c'' = \frac{(a + c)h}{h'} \quad (1)., \text{ oder, wenn } \alpha'' = \alpha \text{ geſetzt wird:}$$

in welchem Falle $h : h' = b : b'$ iſt,

$$a' + c'' = \frac{(a+c)b}{b'} \quad (2).,$$ oder

wenn ſämmtliche Faktoren durch 2 dividirt werden:

$$\frac{a' + c''}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b'} \quad (2').$$

Die Conſtruction dieſer Formeln hat keine Schwierigkeit. (2). und (2′). ſind mit (1)., (1′). unter 2″. Aufl. 2. völlig identiſch, und alſo auch nach denſelben Methoden figürlich darſtellbar. Das unter 2″. Aufl. 2. gefundene Trapez $\mu\nu\varrho\sigma$ wird demgemäß auch der Formel (2′). Genüge leiſten, wenn $\mu\sigma$, welches in 2″. beliebig gewählt werden konnte, hier $= a'$ geſetzt wird.

Die Formel der Möglichkeitsbedingung ergiebt ſich unmittelbar aus der Grundgleichung (1).

8″) b in b′, und h in h′.

NB. $b >$ oder $= h'$.

Aufl. Nach 3. und 2″. Aufl. 1.

9) Zweier Winkel und einer Seite.

9′) α, δ in α', δ', und a in a′.

Aufl. 1., wenn $\alpha' + \delta' < 2R$ iſt:

(Fig. 60). Lege auf $\alpha\delta$ die $\alpha\vartheta = a'$, und durch $\alpha\vartheta$ zwei Gerade $\alpha\mu$, $\vartheta\mu$, unter den Winkeln α', δ' gegen $\alpha\vartheta$ geneigt, wodurch auf der Grundlinie des zu verwandelnden Trapezes $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ entſteht, von deſſen Seiten $\alpha\mu$, $\vartheta\mu$ das geſuchte c″ des geforderten Trapezes begrenzt werden muß, wenn die Löſung der Aufgabe möglich bleiben ſoll.

Es ſey $\alpha\sigma\tau\vartheta$ das verlangte Trapez, alſo $\alpha\sigma = b''$, $\sigma\tau = c''$. Verlängere, wenn es nöthig iſt, die $\beta\gamma = c$, bis die Dreiecksſeiten $\alpha\mu$, $\vartheta\mu$ (oder deren Verlängerungen) in ν, η geſchnitten werden, und ſetze $\alpha\mu = m$, $\alpha\nu = n$, ſo ergeben ſich leicht folgende Gleichheits-Ausdrücke:

1) $(a' + c'')h'' = (a+c)h$, oder,

weil $h : h'' = n : b''$ iſt:

$(a' + c'')b'' = (a+c)n$ (1).

2) $a' : c'' = m : (m - b'')$, oder

$a'(m - b'') = mc''$ (2).

Aus Gleichung (1). und (2). mittelſt gehöriger Umformung:

$$b'' = m - \sqrt{m^2 - \frac{m.(a+c)n}{a'}} \quad (3).,\ \text{oder}$$

$$b'' = m - \sqrt{m\left(m - \frac{(a+c)n}{a'}\right)} \quad (3').$$

$$c'' = \sqrt{a'^2 - \frac{a'(a+c)n}{m}} \quad (4).,\ \text{oder}$$

$$c'' = \sqrt{a'\left(a' - \frac{(a+c)n}{m}\right)} \quad (4').$$

Sämmtliche Formeln geben zu erkennen, daß die Lösung der gabe nur möglich bleibt, wenn das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ größer wird, das gegebene Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$; oder, analytisch ausgedrückt, wenn $ma' > (a+c)n$ ist.

Alle vier Formeln lassen sich leicht nach §. 15. construiren. Kürze wegen wollen wir die figürliche Darstellung der Formel auseinandersetzen.

(Fig. 60). Mache $\delta\zeta = \beta\gamma = c$, also $\alpha\zeta = a + c$. Ziehe $\mu\zeta$, aus ν gegen $\alpha\zeta$ die $\nu\xi \doteq \mu\zeta$, so entsteht:

$$\alpha\xi = \frac{(a+c)n}{m} \quad (\S.\ 15.\ 1.),\ \text{und}$$

$$\vartheta\xi = \alpha\vartheta - \alpha\xi = a' - \frac{(a+c)n}{m}.$$

Beschreibe über $\alpha\vartheta$ einen Halbkreis, errichte in ξ das Perpen $\xi\varrho$ und ziehe die Sehne $\vartheta\varrho$, so wird

$$\vartheta\varrho = \sqrt{a'\left(a' - \frac{(a+c)n}{m}\right)} = c'' \quad (\S.\ 15.\ 9).$$

Schlage aus ϑ mit $\vartheta\varrho$ einen Bogen, der die $\vartheta\alpha$ in π schne ziehe aus π gegen $\alpha\mu$ die $\pi\sigma \doteq \vartheta\mu$, und aus σ gegen $\vartheta\mu$ die $\sigma\tau \doteq$ so wird $\sigma\tau = c''$, und $\alpha\sigma\tau\vartheta$ das verlangte Trapez seyn.

Aufl. 2., wenn $\alpha' + \delta' > 2R$ ist (Fig. 61.):

Mache $\alpha\vartheta = a'$; lege durch α, ϑ die Geraden $\alpha\phi$, $\vartheta\psi$, unter Winkeln α', δ' gegen $\alpha\vartheta$ geneigt. Rückverlängere diese Gerade zur Schneidung in μ, und setze $\alpha\mu = m$. Verlängere ferner bis an den Punkt ν der $\alpha\phi$, wodurch $\alpha\nu = n$ entsteht. D endlich die $\sigma\tau = c''$ zwischen den divergenten $\alpha\phi$, $\vartheta\psi$ richtig ge den, also auch $\alpha\sigma = b''$, so ergeben sich leicht, wie vorher, zwis c'', b'' und den bekannten Geraden folgende Gleichheits-Ausdrü

1) $(a' + c'')h'' = (a + c)h$, oder
$(a' + c'')b'' = (a + c)n$ (1).
2) $a' : c'' = m : (m + b'')$, oder
$a'(m + b'') = mc''$ (2).
3) Aus (1). und (2). mittelſt Eliminirung:

$$b'' = -m + \sqrt{m^2 + \frac{m(a+c)n}{a'}} \quad (3)., \text{ oder}$$

$$b'' = -m + \sqrt{m\left(m + \frac{(a+c)n}{a'}\right)} \quad (3').$$

$$c'' = \sqrt{a'^2 + \frac{a'(a+c)n}{m}} \quad (4)., \text{ oder}$$

$$c'' = \sqrt{a'\left(a' + \frac{(a+c)n}{m}\right)} \quad (4')..$$

Formeln, welche mit den unter Aufl. 1. gefundenen bis auf die Qualität des m, welches hier wegen ſeiner entgegengeſetzten Lage gegen $\alpha\delta$ ſelbſt entgegengeſetzt geworden, völlig übereinſtimmen, und deßhalb ähnliche, aber, wie leicht zu erſehen, ſtets mögliche Conſtructionsweiſen zulaſſen. Um letztere Behauptung zu veranſchaulichen, wählen wir auch hier, der Vergleichung halber, die figürliche Darſtellung der Formel (4′). Anfängern iſt zu rathen, die nicht minder leichten Conſtructionen der übrigen Formeln auszuführen.

(Fig. 61). Mache $\delta\zeta = \beta\gamma = c$, alſo $\alpha\zeta = a + c$; ziehe $\mu\zeta$, und aus ν gegen $\alpha\zeta$ die $\nu\xi \mp \mu\zeta$, wodurch

$$\alpha\xi = \frac{(a+c)n}{m} \text{ (§. 15. 1.), und}$$

$$\vartheta\xi = \vartheta\alpha + \alpha\xi = a' + \frac{(a+c)n}{m} \text{ wird.}$$

Beſchreibe über $\vartheta\xi$ einen Halbkreis, errichte in α das Perpendikel $\alpha\varrho$, und ziehe die Sehne $\vartheta\varrho$, welche offenbar $= c''$ wird (§. 15. 9). Beſchreibe aus ϑ mit $\vartheta\varrho$ einen Bogen, der die $\vartheta\alpha$, jenſeits α, in π ſchneidet; ziehe aus π gegen $\alpha\Phi$ die $\pi\sigma \mp \vartheta\mu$, und aus σ gegen $\vartheta\psi$ die $\sigma\tau \mp \alpha\vartheta$, ſo leuchtet ein, daß $\sigma\tau = c''$, und $\alpha\sigma\tau\vartheta$ das verlangte Trapez ſeyn müſſe.

NB. Wäre $\alpha' + \delta' = 2R$, ſo würde $c'' = a'$, und $\alpha\sigma\tau\vartheta$ ein Parallelogramm, deſſen Conſtruction leicht aus der Gleichung (1). abgeleitet werden könnte.

9″) α, δ in α', δ', und b in b′.

Aufl. 1., wenn $\alpha' + \delta' < 2R$ iſt (Fig. 59.):

Ziehe aus α die $\alpha\mu = b'$, unter dem Winkel α', aus μ die $\mu\vartheta$, unter dem Winkel δ' gegen $\alpha\delta$ geneigt, wodurch das völlig bestimmte Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ entsteht, welches leicht zum verlangten Trapez $\alpha\mu\varrho\sigma$ ergänzt werden kann, mittelst des Parallelogramms $\vartheta\mu\varrho\sigma$, vorausgesetzt, daß es kleiner ausfalle als das ursprüngliche Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$. Denke zu diesem Behufe das Parallelogramm $\vartheta\mu\varrho\sigma$ gefunden, und setze, nachdem $\beta\gamma$ bis an den Punkt ν der $\alpha\mu$ verlängert worden:

$$\alpha\vartheta = g,\ \alpha\nu = n,\ \vartheta\sigma = \mu\varrho = c''.$$

$$a'' = \alpha\sigma = g + c''; \quad a'' + c'' = g + 2c'',$$

so ergiebt sich leicht die Grundgleichung:

$$(g + 2c'')h' = (a + c)h \text{ (1).}, \text{ oder}$$

weil $h' : h = b' : n$ ist:

$$(g + 2c'')b' = (a + c)n \text{ (2).}, \text{ folglich}$$

$$g + 2c'' = \frac{(a + c)n}{b'},$$

eine Formel, welche bereits unter 7″. gefunden und construirt wurde.

NB. Die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ kleiner wird als das gegebene Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$. Wie läßt sich diese Möglichkeits-Bedingung analytisch ausdrücken?

Aufl. 2., wenn $\alpha' + \delta' > 2R$ ist (Fig. 59.):

Ziehe aus α die $\alpha\mu = b'$, unter dem Winkel α' gegen $\alpha\delta$ geneigt; lege durch μ die $\mu\tau \mp \alpha\delta$, durch α die $\alpha\zeta$, unter dem Winkel $2R - \delta'$ gegen $\alpha\delta$ geneigt, wodurch das völlig bestimmte Dreieck $\alpha\mu\zeta$, mit der Seite $\mu\zeta = g'$ entsteht, zu dessen Ergänzung das Parallelogramm $\alpha\zeta\phi\psi$ gefunden werden muß, um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen. Man erhält mittelst der unter Aufl. 1. angewendeten Betrachtung, wenn $\alpha\psi = \zeta\phi = a''$ gesetzt wird:

$$g' + 2a'' = \frac{(a + c)n}{b'}.$$

(Fig. 59). Construire demnach, wie vorher

$$\alpha\lambda = \frac{(a + c)n}{b'} = g' + 2a'' \text{ (§. 15. 1).}$$

Mache $\lambda\xi = \mu\zeta = g'$, halbire $\alpha\xi$ in ψ, und ziehe aus ψ gegen $\mu\tau$ die $\psi\phi \mp \alpha\zeta$, so wird offenbar $\alpha\psi = a''$, und $\alpha\mu\phi\psi$ das verlangte Trapez.

NB. Es leuchtet auch hier ein, daß die Lösung der Aufgabe nur ausführbar bleibt, wenn das Dreieck $\alpha\mu\zeta$ kleiner wird als das gegebene Trapez.

Anmerkung: Wäre $\alpha' + \delta' = 2R$, ſo würden g und g' gleich Null, und es entſtände für das Parallelogramm die Formel:

$2a'' = 2c'' = \frac{(a + c)n}{b'}$, deren Conſtruction in die Augen ſpringt.

10) Zweier Winkel und des Abſtandsperpendikels der parallelen Seiten. α, δ in α', δ' und h in h'.

Aufl. Nach 9''., weil $h : h' = n : b'$ iſt.

11) Zweier Seiten und eines Winkels.

11') a, c in a', c', und α in α'.

Aufl. Nach 7'. und 1.

11'') a, b in a', b' und α in α'.

Aufl. (Fig. 59). Meſſe ab auf der Grundlinie $\alpha\delta$ des gegebenen Trapezes $\alpha\beta\gamma\delta$ die $\alpha\vartheta = a'$; lege durch α die $\alpha\mu = b'$, unter dem Winkel α' gegen $\alpha\delta$ geneigt, ziehe $\mu\vartheta$, und ergänze das entſtandene Dreieck $\alpha\mu\vartheta$ zum verlangten Trapez $\alpha\mu\eta\vartheta$, mittelſt eines geſuchten Dreiecks $\vartheta\mu\eta$. Setze demnach $\mu\eta = c''$, und $\alpha\nu = n$, ſo entſteht:

$(a' + c'')h' = (a + c)h$ (1)., oder,

weil $h' : h = b' : n$ iſt:

$(a' + c'')b' = (a + c)n$ (2)., folglich

$a' + c'' = \frac{(a + c)n}{b'}$.

Mache alſo $\delta\varkappa = \beta\gamma = c$, folglich $\alpha\varkappa = a + c$; ziehe $\mu\varkappa$, und aus ν die $\nu\lambda \parallel \mu\varkappa$, ſo wird

$\alpha\lambda = \frac{(a + c)n}{b'} = a' + c''$ (§. 15. 1.) und

$\vartheta\lambda = \alpha\lambda - \alpha\vartheta = c''$.

Trage $\vartheta\lambda$ auf $\mu\tau \parallel \alpha\delta$, ſo daß $\mu\eta = \vartheta\lambda$ wird; verbinde ϑ mit η durch eine Gerade, ſo entſteht offenbar $\alpha\mu\eta\vartheta$ als verlangtes Trapez.

NB. Es leuchtet ein, daß die Löſung der Aufgabe nur möglich iſt, wenn das Dreieck $\alpha\mu\vartheta$ kleiner wird, als das gegebene Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$, d. h. wenn $a'b' \sin. \alpha' < (a + c)h$ wird.

11''') a, b in a', b', und δ in δ'.

Aufl. Analog jener unter 11''.

11^{IV}) b, d in b', d', und α in α' NB. $d' > = b' \sin. \alpha'$.

Aufl. (Fig. 59). Ziehe aus α die $\alpha\mu = b'$, unter dem Winkel α' gegen $\alpha\delta$ geneigt, ſchlage aus μ mit d' einen Bogen, der die $\alpha\delta$ in ϑ berührt oder ſchneidet, und ziehe $\mu\vartheta = d'$, wodurch das völlig

bestimmte Dreieck $\alpha\mu\vartheta$, mit der Seite $\alpha\vartheta = g$, entsteht, welches, wenn es kleiner als $\alpha\beta\gamma\delta$ ausfällt, leicht auf folgende Weise mittelst des Parallelogramms $\vartheta\mu\varrho\sigma$ zum verlangten Trapez ergänzt werden kann. Setze nämlich, wie früher

$\alpha\nu = n$, $\mu\varrho = \vartheta\sigma = c''$, und $\alpha\sigma = a'' = g + c''$, also

$a'' + c'' = g + 2c''$, so entsteht offenbar:

$(g + 2c'')h' = (a + c)h$ (1)., oder,

weil $h' : h = b' : n$ ist:

$(g + 2c'')b' = (a + c)n$ (2)., folglich

$$g + 2c'' = \frac{(a + c)n}{b'}.$$

eine Formel, welche bereits unter 9''. Aufl. 2. gefunden und construirt worden ist.

NB. Das Dreieck $\alpha\mu\vartheta$ wird kleiner als das Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$, wenn: $g . b' \sin. \alpha' < (a + c)h$ ist. Wie läßt sich g durch b', d', α' ausdrücken?

12) Zweier Seiten und des Abstandsperpendikels der parallelen Seiten.

12') a, b in a', b' und h in h'. NB. $b' >$ oder $= h'$.

Aufl. (Fig. 59). Zeichne wie vorher über $\alpha\delta$ das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ und zwar so, daß $\alpha\vartheta = a'$, die dazu gehörige Höhe $= h'$, und $\alpha\mu = b'$ wird. Lege durch μ die $\mu\tau \parallel \alpha\delta$, und ergänze das genannte Dreieck durch ein zweites $\vartheta\mu\eta$ zum verlangten Trapez $\alpha\mu\eta\vartheta$ nach 11''; denn man erhält zur Bestimmung der Seite $\mu\eta = c''$ die Formel:

$$a' + c'' = \frac{(a + c)n}{b'}.$$

Damit aber das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ kleiner werde als das Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$, muß offenbar

$a'h' < (a + c)h$ seyn.

12'') b, d in b', d' und h in h'.

NB. h' darf nicht größer seyn, als die kleinste der Seiten, und das aus b', d' und der Zwischenhöhe h' construirte Dreieck muß kleiner ausfallen als das gegebene Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$.

Aufl. (Fig. 59). Construire auf $\alpha\delta$ das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$, so daß $\alpha\mu = b'$, $\mu\vartheta = d'$ die aus μ gefällte Höhe $= h'$, und $\alpha\vartheta = g$ wird; ergänze dasselbe durch das Parallelogramm $\vartheta\mu\varrho\sigma$ zum verlangten Trapez $\alpha\mu\varrho\sigma$ nach 11^{IV}., zu dessen Bestimmung sich nach dortiger Betrachtung die Formel

$$g + 2c'' = \frac{(a + c)n}{b'}$$ darbietet.

Wie läßt ſich obige Möglichkeitsbedingung analytiſch darſtellen?

13) Dreier Seiten.

13′) a, b, c in a′, b′, c′.

NB. $b' > \text{oder} = \frac{(a+c)h}{a'+c'}$.

Aufl. Man erhält $(a'+c')h'' = (a+c)h$, alſo

$h'' = \frac{(a+c)h}{a'+c'}$, folglich

h″ nach 7′., und dann b′ nach 2″.

13″) a, b, d in a′, b′, d′.

Aufl. Nach 7‴. mit Berückſichtigung des a′, nebſt Beifügung der nöthigen Möglichkeits-Bedingungen.

14) Eines Winkels, einer Seite, und des Abſtandsperpendikels der parallelen Seiten.

14′) α in α', a in a′, und h in h′.

Aufl. Nach 8′. und 1.

14″) α in α', d in d′, und h in h′. NB. $d' >$ oder $= h'$.

Aufl. (Fig. 59). Conſtruire über $\alpha\delta$ das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$, ſo daß der Winkel $\mu\alpha\vartheta = \alpha'$, die Seite $\mu\vartheta = d'$, und die aus μ auf $\alpha\vartheta = g$ gefällte Höhe $= h'$ wird. Ergänze dieſes Dreieck zum verlangten Trapez $\alpha\mu\varrho\sigma$ mittelſt der unter 12″. gefundenen Endformel für die Beſtimmung der Parallelogrammsſeite $\mu\varrho = \vartheta\sigma = c''$; denn es ergiebt ſich, wenn $\alpha\nu = n$ geſetzt wird:

$(g + 2c'')h' = (a+c)h$ (1)., oder,

weil $h' : h = b' : n$ iſt:

$(g + 2c'')b' = (a+c)n$ (2)., folglich

$g + 2c'' = \frac{(a+c)n}{b'}$, wie unter 12″.

Die Löſung der Aufgabe iſt nur möglich, wenn das Dreieck $\alpha\vartheta\mu$ kleiner wird als das gegebene Trapez.

Wie läßt ſich dieſe Möglichkeits-Bedingung analytiſch ausdrücken?

γγγ) Verwandlung eines Trapezoids in ein Trapezoid nach gegebenen Bedingungen.

NB. In dieſer Abtheilung ſollen ſtets bezeichnet werden (Fig. 62.):

1) Die vier Winkel des zu verwandelnden Trapezoids durch . . . $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
2) Die vier Seiten $\delta\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ durch . . . . . a, b, c, d.
3) Die beiden Diagonalen $\alpha\gamma, \beta\delta$ durch . . . . . e, f.
4) Jede Quantitäts-Aenderung eines Elements durch Beſtrichelung des demſelben entſprechenden Buchſtaben-Symbols; die bekannte Aenderung durch Beifügung eines Strichs, die unbekannte durch Beifügung zweier Striche.

§. 25. Aufg. Ein Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein anderes, von gleichem Flächen-Inhalte, zu verwandeln, durch Quantitäts-Aenderung:

1) Eines Winkels, α in α'.

Aufl. (Fig. 62). Nach §. 24. 1., d. h. ziehe durch β, γ die Geraden $\beta\sigma$, $\gamma\tau$, parallel der $\alpha\delta$; lege an α die $\alpha\eta$, unter dem Winkel α' gegen $\alpha\delta$ geneigt, mache $\eta\varkappa = \beta\varepsilon$; ziehe durch $\varkappa$ die $\delta\vartheta$ bis an die zweite Parallele, ſodann die $\eta\vartheta$, wodurch offenbar $\alpha\eta\vartheta\delta$ als verlangtes Viereck entſteht.

2) Einer Seite, a in a′.

Aufl. (Fig. 62). Durch Anwendung des §. 22. 2. entweder auf eines der Diagonal-Dreiecke $\delta\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta$, oder auf beide, jenachdem die Diagonale $\beta\delta = f$, bei dem Uebergange des $\delta\alpha = a$ in a′, unverändert bleibt oder nicht. — In wie fern ließe ſich auch nach §. 24. 2. und §. 22. 2. die Löſung bewerkſtelligen?

3) Eines Winkels und einer Seite.

3′) α in α' und a in a′.

Aufl. (Fig. 62). Entweder durch Anwendung des §. 22. 4′. und 2. auf die Diagonal-Dreiecke $\delta\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta$, oder des §. 24. 5′. auf das Trapez $\alpha\beta\varepsilon\delta$, und des §. 22. 2. auf das Ergänzungs-Dreieck $\beta\gamma\varepsilon$.

3″) β in β', und a in a′.

Aufl. (Fig. 62). Durch Anwendung des §. 22. 1. auf das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, des §. 22. 2. oder 8″. auf das Dreieck $\alpha\delta\gamma$. Könnte die Löſung auch wohl mittelſt des §. 24. 5‴. ausgeführt werden?

4) Zweier Winkel.

4′) α, δ in α', δ'.

Aufl. (Fig. 62). Durch Anwendung des §. 24. 4. auf das Trapez $\alpha\beta\varepsilon\delta$, und des §. 22. 2. auf das Ergänzungs-Dreieck $\beta\gamma\varepsilon$.

4″) α, γ in α', γ'.

Aufl. (Fig. 62). Durch Anwendung des §. 22. 1. und 4″. auf die Diagonal-Dreiecke $\delta\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta$.

5) Zweier Seiten.

5′) a, b in a′, b′.

Aufl. (Fig. 62). Durch Anwendung des §. 22. 2. oder auch 8″. auf die Diagonal-Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\delta\gamma$. — In wie fern ließe ſich die Löſung auch mittelſt des §. 24. 7″. ausführen?

5″) a, c in a′, c′.

Aufl. (Fig. 62). Analog jener unter 5′.

NB. Die übrigen hierher gehörigen acht Haupt-Aufgaben, welche aus der beſtimmten Quantitäts-Aenderung von drei und vier Elementen (mit Ausſchluß der Diagonalen) entſpringen, ſind hier der Kürze wegen außer Acht gelaſſen. Leſer, denen es um Vollſtändigkeit und Erſchöpfung wiſſenſchaftlicher Gegenſtände zu thun iſt, mögen die Bildung und Löſung derſelben (nach §. 22. 23. 24.) ſelbſt auszuführen ſuchen.

ββ) Von verſchiedener Art.

ααα) Verwandlung in ein Trapezoid.

26. Aufg. Jedes Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Trapezoid zu verwandeln.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. (Fig. 63). Ziehe eine der Diagonalen, etwa $\beta\delta$; lege durch die gegenüberſtehende Winkelſpitze γ, oder α die $\phi\psi \neq \beta\delta$, und verbinde ε, einen beliebigen Punkt der $\phi\psi$, mit β, δ durch Gerade, ſo entſteht offenbar $\alpha\beta\varepsilon\delta$ als verlangtes Trapezoid.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 25).

Aufl. Nach §. 26. 1. und §. 25.; oder auch nach §. 23. und §. 26. 1.

§. 27. Jedes Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Trapezoid zu verwandeln.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. Analog der Conſtr. unter §. 26. 1.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 25).

Aufl. Nach §. 27. 1. und §. 25., oder auch nach §. 24. §. 27. 1. und §. 25.

βββ) Verwandlung in ein Trapez.

§. 28. Aufg. Jedes Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Trapez zu verwandeln.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. (Fig. 63). Halbire eine der Seiten, etwa $\delta\gamma$ in η, und ziehe durch den Halbirungspunkt η dergestalt eine, von den anliegenden parallelen Seiten begrenzte Gerade $\vartheta\varkappa$, daß sich $\alpha\beta\vartheta\varkappa$ als Trapez ergiebt, wodurch offenbar der Aufgabe genügt ist.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 24).

Aufl. 1. Nach §. 28. 1. und §. 24., oder auch nach §. 23. §. 28. 1. und §. 24.

Aufl. 2. Bilde die Grundgleichung zwischen den Inhalten des Parallelogramms und des Trapezes, und suche daraus die nöthigen Constructionsformeln, analog den Verfahrungsarten in §. 24., abzuleiten.

§. 29. Jedes Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Trapez zu verwandeln.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. Analog der Constr. in §. 26. 1., mit dem Unterschiede, daß der Punkt ε nicht beliebig gewählt, sondern dnrch eine, aus β mit $\alpha\delta$ parallel gezogene Gerade bestimmt wird.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 24).

Aufl. Nach §. 29. 1. und §. 24., oder auch nach §. 25. §. 29. 1. und §. 24.

γγγ) Verwandlung in ein Parallelogramm.

§. 30. Aufg. Jedes Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Parallelogramm zu verwandeln.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. Halbire eine der nicht parallelen Seiten, und lege durch den Halbirungspunkt eine Gerade, parallel und gleich der gegenüberliegenden Seite.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 23).

Aufl. 1. Nach §. 30. 1. und §. 23., oder auch nach §. 24. §. 30. 1. und §. 23.

Aufl. 2. Wie unter §. 28. 2. Aufl. 2. mittelst der Inhalts-Gleichung. Es sey die Höhe h' des verlangten Parallelogramms bestimmt, man sucht die Grundlinie a''. Es ergiebt sich

$a''h' = \frac{1}{2}(a + c)h$, folglich

$a'' = \frac{\frac{1}{2}(a + c)h}{h'}$ (1)., oder

$a'' = \frac{\frac{1}{2}(a + c) \cdot \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h'}$ (2).,

Formeln, deren figürliche Darſtellung nach §. 15. leicht ausgeführt werden kann.

Conſtruction der Formel (1).:

1) (Fig. 64). Halbire die nicht parallelen Seiten $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ in η, ϑ, und ziehe $\eta\vartheta = \frac{1}{2}(a + c)$. Errichte im Endpunkte einer der parallelen Seiten, etwa in β der $\beta\gamma$, ein Perpendikel, wodurch $\alpha\delta$ oder deren Verlängerung in λ geſchnitten und $\beta\lambda = h$ wird. Lege auf dieſes Perpendikel die $\beta\varepsilon = h'$, und auf die Standlinie deſſelben die $\beta\varkappa = \eta\vartheta$. Ziehe $\varepsilon\varkappa$, und aus λ auf $\beta\gamma$ die $\lambda\mu \parallel \varepsilon\varkappa$, wodurch $\beta\mu = \frac{\frac{1}{2}(a + c)h}{h'} = a''$ (§. 15. 1.) entſteht. Vollende endlich das zu $\beta\mu$, $\beta\varepsilon$ gehörige Rechteck $\beta\mu\nu\varepsilon$, ſo leuchtet ein, daß dieſes der Forderung entſprechen müſſe.

2) (Fig. 65). Conſtruire, wie vorher, $\eta\vartheta = \frac{1}{2}(a + c)$. Wähle in dieſer einen beliebigen Punkt o, und lege durch denſelben eine Senkrechte, welche von den parallelen Seiten, oder deren Verlängerungen, in μ und ϱ dergeſtalt begrenzt wird, daß $\mu\varrho = h$ iſt. Trage auf $\mu\varrho$ die $\mu\nu = h'$, auf $\mu\beta$ die $\mu\varkappa = o\eta = m$, auf $\mu\gamma$ die $\mu\lambda = o\vartheta = n$, wodurch $\varkappa\lambda = m + n = \frac{1}{2}(a + c)$ entſteht, folglich

$$a'' = \frac{(m + n)h}{h'} = \frac{mh}{h'} + \frac{nh}{h'}.$$

Ziehe demnach $\nu\varkappa$, $\nu\lambda$ und aus ϱ die $\varrho\sigma \parallel \nu\varkappa$, die $\varrho\tau \parallel \nu\lambda$, wodurch

$\mu\sigma = \frac{mh}{h'}$, $\mu\tau = \frac{nh}{h'}$ (§. 15. 1.), und

$\sigma\tau = \mu\sigma + \mu\tau = \frac{mh}{h'} + \frac{nh}{h'} = a''$ wird.

Vollende endlich das zu $\sigma\tau$ und $\mu\nu$ gehörige Rechteck $\sigma\tau\Phi\downarrow$, welches offenbar der Aufgabe Genüge leiſtet, weil $\sigma\tau = a''$ und $\mu\nu = h'$ iſt.

NB. Nicht weniger leicht läßt ſich die Conſtruction der Formel (2). bewerkſtelligen.

§. 31. Aufg. Jedes Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Parallelogramm zu verwandeln.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. 1. Nach §. 29. 1. und §. 30. 1.

Aufl. 2. Mittelſt bekannter Sätze der Geometrie, entweder durch Halbirung der Seiten ꝛc., oder durch Ziehung gerader Linien aus den Winkelſpitzen, parallel den Diagonalen ꝛc.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 23).

Aufl. 1. Nach §. 31. 1. und §. 23.

Aufl. 2. Durch Ableitung der nöthigen Conſtructionsformeln aus der Inhalts-Gleichung des Trapezoids und des Parallelogramms. Es ſey z. B. die Höhe h' des verlangten Parallelogramms gegeben. (Fig. 66). Zerlege das Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$, mittelſt der Geraden $\beta\varepsilon \pm \alpha\delta$, in ein Trapez $\alpha\beta\varepsilon\delta$, und in ein Dreieck $\beta\gamma\varepsilon$. Ziehe durch γ die $u\omega \pm \alpha\delta$, und errichte auf derſelben das Perpendikel $\gamma\zeta = h'$, welches entweder ſelbſt oder verlängert die Parallelen $\beta\varepsilon$, $\alpha\delta$ in o und ϱ ſchneidet. Halbire $\alpha\beta$ in η, $\beta\gamma$ in $\varkappa$, $\delta\varepsilon$ in ϑ, $\varepsilon\gamma$ in λ; fälle aus dieſen Punkten auf $u\omega$ die Senkrechten $\eta\sigma$, $\varkappa\mu$, $\vartheta\tau$, $\lambda\nu$, und ſetze zur Abkürzung:

$$o\gamma = g,\ \gamma\mu = \tfrac{1}{2}o\beta = m,\ \gamma\sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha\varrho + o\beta) = s,$$
$$o\varrho = h,\ \gamma\nu = \tfrac{1}{2}o\varepsilon = n,\ \gamma\tau = \tfrac{1}{2}(\delta\varrho + o\varepsilon) = t,$$

woraus folgende Grundgleichung entſpringt:

$$a''h' = gm + hs + gn + ht, \text{ folglich}$$
$$a'' = \frac{gm}{h'} + \frac{hs}{h'} + \frac{gn}{h'} + \frac{ht}{h'} \quad (1).,$$

eine Formel, deren figürliche Darſtellung leicht auf nachſtehende Weiſe ausgeführt werden kann.

Ziehe $\zeta\mu$, $\zeta\sigma$, $\zeta\nu$, $\zeta\tau$, und aus o auf $u\omega$ die $o\mu' \pm \zeta\mu$, und $o\nu' \pm \zeta\nu$, aus ϱ auf $\beta\varepsilon$ oder deren Verlängerung die $\varrho\sigma' \pm \zeta\sigma$ und $\varrho\tau' \pm \zeta\tau$, wodurch offenbar nach §. 15. 1. entſteht:

$$\gamma\mu' = \frac{gm}{h'},\ \gamma\nu' = \frac{gn}{h'},$$
$$o\sigma' = \frac{hs}{h'},\ o\tau' = \frac{ht}{h'}.$$

Ziehe ferner aus σ', τ' auf $u\omega$ die $\sigma'\phi \pm o\mu'$, die $\tau'\psi \pm o\nu'$, wodurch

$\mu'\phi = o\sigma'$, $\nu'\psi = o\tau'$, alſo

$\gamma\phi = \gamma\mu' + o\sigma'$, $\gamma\psi = \gamma\nu' + o\tau'$, folglich

$\phi\psi = \gamma\mu' + o\sigma' + \gamma\nu' + o\tau' = a''$ wird.

Vollende demnach das zu $\phi\psi$ und $\gamma\zeta$ gehörige Parallelogramm $\phi\psi\phi'\psi'$, ſo leuchtet ein, daß dieſes den Bedingungen der Aufgabe entſprechen müſſe.

ddd) Verwandlung in ein Quadrat.

§. 32. **Aufg.** Jedes Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. (Fig. 63). Man erhält, mittelſt obiger Bezeichnungsweiſe, die Grundgleichung:

$a''^2 = ah$, alſo $a'' = \sqrt{ah}$, woraus folgende Conſtruction entſpringt: Errichte in α das Perpendikel $\alpha\lambda = h$; ſchlage aus α mit $\alpha\lambda$ einen Bogen, der die $\alpha\delta$ in μ ſchneidet; beſchreibe über der größern der Geraden $\alpha\delta$, $\alpha\mu$ einen Halbkreis; ſtelle auf den Abgrenzungspunkt der kleinern eine Senkrechte, welche den Halbkreis in ν trifft; ziehe die Sehne $\alpha\nu$, trage dieſe auf $\alpha\delta$ ab, $\alpha\varrho = \alpha\nu$, und conſtruire das der Seite $\alpha\varrho$ zugehörige Quadrat, ſo wird dadurch der Aufgabe Genüge geleiſtet, weil $\alpha\varrho = \alpha\omega = a''$ iſt (§. 15. 9).

33. **Aufg.** Jedes Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. 1. Nach §. 30. und §. 32.

Aufl. 2. Nach §. 15. 9. mittelſt der Grundgleichung $a''^2 = \frac{1}{2}(a+c)h$, woraus $a'' = \sqrt{\frac{1}{2}(a+c)h}$ als eine leicht zu conſtruirende Formel hervorgeht.

34. **Aufg.** Jedes Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. 1. Nach §. 31. 1. und §. 32.

Aufl. 2. Nach §. 15. 9., denn ſetze die zur Diagonale $\alpha\gamma = e$ gehörigen Höhen h, h', ſo ergiebt ſich:

$a''^2 = \frac{1}{2}(h + h')e$, folglich $a'' = \sqrt{\frac{1}{2}(h + h')e}$,

eine Formel, deren Conſtruction keine Schwierigkeit darbietet.

γ) Verwandlung eines Vielecks in ein Vieleck.

§. 35. Aufg. In jedem Vieleck zu verwandeln:

1) Einen einſpringenden Winkel in einen ausſpringenden.

Aufl. leicht nach §. 22.

2) Einen ausſpringenden Winkel in einen einſpringenden.

Aufl. leicht nach §. 22.

§. 36. Aufg. Jedes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches einen beliebig gewählten Punkt als Winkelſpitze erhält. Es ſey der Punkt gewählt:

1) In einer Seite des Vielecks.

Aufl. leicht nach §. 22.

2) In der Verlängerung einer Vielecksſeite.

Aufl. Analog der vorigen nach §. 22.

3) Innerhalb der Vielecksfläche.

Aufl. leicht nach §. 22.

4) Außerhalb der Vielecksfläche.

Aufl. Nach 2., wenn das Vieleck durch eine, aus o gezogene, Gerade in zwei geradlinig begrenzte Figuren zerlegt wird.

NB. Sonſtige Verwandlungen eines Vielecks, bedingt durch Quantitäts-Aenderungen einzelner Elemente, müſſen hier, zur Vermeidung unnützer Weitläuftigkeiten, außer Acht gelaſſen werden.

b) Verwandlung eines N-ecks in ein (N ∓ M)-eck.

α) Verwandlung eines N-ecks in ein (N — M)-eck.

§. 37. Aufg. Jedes Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ zu verwandeln in ein Dreieck.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. (Fig. 67). Lege durch eine beliebige Winkelſpitze, etwa γ, eine Gerade $\vartheta\zeta$, parallel der Quer-Diagonale $\beta\delta$; verlängere die den Winkel γ nicht einſchließenden Seiten $\alpha\delta$, $\alpha\beta$ bis zur Schneidung der $\vartheta\zeta$ in ε, η und ziehe $\beta\varepsilon$, $\delta\eta$, ſo entſtehen zwei Dreiecke $\alpha\beta\varepsilon$, $\alpha\delta\eta$, welche der Forderung Genüge leiſten, wie ſich dies leicht nachweiſen läßt.

NB. Die Conſtructions-Methode erleidet keine weſentliche Abänderung, wenn ein Winkel des Vierecks, etwa γ, ein einſpringender (überſtumpfer) wäre.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 22).

Aufl. Nach §. 37. 1. und §. 22.

38. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein (N — 1)-eck.

Aufl. (Fig. 68). Lege durch die Spitze eines Winkels, etwa δ, eine Gerade parallel der Diagonale, welche die Endpunkte der Winkelſchenkel verbindet, $\vartheta\zeta \parallel \gamma\varepsilon$; verlängere die dem abgegrenzten Dreiecke anliegenden Polygonſeiten $\beta\gamma$, $\eta\varepsilon$ bis zur Schneidung der $\vartheta\zeta$ in $\varkappa$, λ, und ziehe $\varepsilon\varkappa$, $\gamma\lambda$, ſo entſtehen zwei Dreiecke $\gamma\varepsilon\varkappa$, $\gamma\varepsilon\lambda$, welche dem Dreiecke $\gamma\varepsilon\delta$ gleich ſind (§. 22. 1.) und, zur Stellvertretung des letztern geſetzt, mit dem übrigen Theile des gegebenen N-ecks das verlangte (N — 1)-eck bilden.

39. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein (N — M)-eck.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 38.; die etwa vorkommenden einſpringenden Winkel können leicht nach §. 35. 1. in ausſpringende verwandelt werden.

β) Verwandlung eines N-ecks in ein (N + M)-eck.

40. Aufg. Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ zu verwandeln in ein Trapezoid.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. (Fig. 69). Ziehe aus einer beliebigen Winkelſpitze auf die Gegenſeite eine Gerade $\gamma\varkappa$, durch eine zweite Winkelſpitze, etwa α die $\vartheta\zeta \parallel \gamma\varkappa$; ſodann aus $\varkappa$ die $\varkappa\lambda$, geneigt gegen $\beta\gamma$, und ſchneidend die $\vartheta\zeta$ in λ; endlich die Verbindungslinie $\gamma\lambda$, wodurch ein Trapezoid $\beta\varkappa\lambda\gamma$ entſteht, welches offenbar der Forderung Genüge leiſtet.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 25).

Aufl. Nach §. 40. 1. und §. 25., oder auch nach §. 22., §. 40. 1. und §. 25.

§. 41. Aufg. Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ zu verwandeln in ein Trapez.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. (Fig. 69). Nach §. 40. 1. nur mit dem Unterſchiede, daß $\varkappa\lambda$ nicht geneigt, ſondern parallel gegen $\beta\gamma$ gezogen werden muß.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. 1. Nach §. 41. 1. und §. 24., oder auch nach §. 22., §. 41. 1. und §. 24.

Aufl. 2. Durch unmittelbare Ableitung der nöthigen Conſtructionsformeln aus der Grundgleichung zwiſchen den Inhalten des Dreiecks und des geforderten Trapezes. Nach Analogie des §. 24.

§. 42. Aufg. Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ zu verwandeln in ein Parallelogramm.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. leicht nach einem bekannten Satze der Geometrie.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 23).

Aufl. 1. Nach §. 42. 1. und §. 23.

Aufl. 2. Durch unmittelbare Ableitung der Conſtructions-Formeln aus der Grundgleichung zwiſchen den Inhalten des Dreiecks und des Parallelogramms (vergleiche §. 23).

§. 43. Aufg. Jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Nach §. 42. 1. und §. 32.; oder auch durch unmittelbare Conſtruction der Formel:

$$a'' = \sqrt{\tfrac{1}{2}ad}, \text{ nach §. 15. 9.,}$$

in welcher a'' die Seite des Quadrats, a die Grundlinie des Dreiecks, und d die Höhe deſſelben bezeichnet.

§. 44. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein $(N+1)$-eck.

Aufl. Bilde in der Figur, durch Ziehung einer Diagonale ein Eck-Dreieck, und verwandle dieſes nach §. 40. 1. in ein Viereck dergeſtalt, daß die Diagonale Seite bleibt.

§. 45. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein $(N+M)$-eck.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 44.

γ) Verwandlung eines N-ecks in ein $(N \mp M)$-eck.

§. 46. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon..$ zu verwandeln in ein Trapezoid.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. Nach §. 39.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 25).

Aufl. Nach §. 46. 1. und §. 25.

§. 47. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon..$ zu verwandeln in ein Trapez.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. Nach §. 46. 1. und §. 29. 1.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 24).

Aufl. Nach 47. 1. und §. 24.

§. 48. Aufg. Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon..$ zu verwandeln in ein Parallelogramm.

1) Ohne Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente.

Aufl. Nach §. 46. 1. und §. 31. 1.; oder auch nach §. 47. 1. und §. 36. 1.

2) Mit Rücksicht auf gegebene Bestimmungs-Elemente (§. 23).

Aufl. 1. Nach §. 48. 1. und §. 23.

Aufl. 2. Durch Ableitung der Constructionsformel aus der Grundgleichung zwischen den Inhalten des N-ecks und des Parallelogramms. Am vortheilhaftesten wird der Inhalt des N-ecks nach trapez- und dreieckförmigen Stücken dargestellt z. B.:

Es soll das N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\vartheta$ in ein Parallelogramm verwandelt werden, zu dessen Bestimmung die Höhe h' gegeben ist.

(Fig. 70). Errichte auf einer Seite, etwa $\alpha\vartheta$, ein Perpendikel $\lambda\varkappa$, und trage darauf ab $\lambda\zeta = h'$. Fälle aus sämmtlichen Winkelspitzen der Figur Senkrechte auf dieses Perpendikel oder dessen Verlängerung, wodurch das N-eck in Trapez- und Dreiecksformen zerfällt, deren Inhalt nach bekannter Methode leicht auf folgende Weise bestimmt wird. Halbire nämlich sämmtliche Seiten des durch h' getheilten N-ecks, mit Ausnahme der Standlinie $\alpha\vartheta$; also $\alpha\beta$ in α'', $\beta\gamma$ in β'', $\gamma\delta$ in γ'', $\delta\varkappa$ in δ'', $\varepsilon\varkappa$ in ε'', $\eta\varepsilon$ in η'', $\vartheta\eta$ in ϑ'', und fälle aus diesen Halbirungspunkten Perpendikel auf die Standlinie $\alpha\vartheta$, d. h. in Fig. 70. $\alpha''\alpha'$, $\beta''\beta'$, $\gamma''\gamma'$, $\delta''\delta'$, $\varepsilon''\varepsilon'$, $\eta''\eta'$, $\vartheta''\vartheta'$. Setze der Abkürzung halber:

$\lambda\alpha' = a$, $\lambda\beta' = b$, $\lambda\gamma' = c$,
$\lambda\varepsilon' = e$, $\lambda\eta' = f$, $\lambda\vartheta' = g$,
$\lambda\mu = m$, $\mu\nu = n$, $\nu\varrho = r$, $\varrho\varkappa = k$,
$\varkappa\sigma = s$, $\sigma\tau = t$, $\tau\lambda = l$,

und bilde mittelſt dieſer Elemente den Inhalts-Ausdruck des N-ecks. Man findet:

$am + bn + cr - dk + es + ft + gl$, folglich die Gleichung, wenn die Grundlinie des Parallelogramms durch a'' bezeichnet wird:

$a''h' = am + bn + cr - dk + es + ft + gl$ (1)., oder

$$a'' = \frac{am}{h'} + \frac{bn}{h'} + \frac{cr}{h'} - \frac{dk}{h'} + \frac{es}{h'} + \frac{ft}{h'} + \frac{gl}{h'} \text{ (1')},$$

eine Formel, deren Conſtruction ſich leicht ausführen läßt.

Verbinde nämlich den Endpunkt ζ der Höhe h' mit den Standpunkten α', β', γ', δ', ε', η', ϑ' der auf $\alpha\vartheta$ gefällten Perpendikel durch Gerade, welche in Fig. 70., der Deutlichkeit wegen, weggelaſſen ſind, und ziehe mit jeder von dieſen aus den Endpunkten der entſprechenden Trapez- und Dreieckshöhen auf die zugehörige Grundlinie eine Parallele — alſo in Fig. 70. aus μ die $\mu\mu' \pm \zeta\alpha'$, aus ν die $\nu\nu' \pm \zeta\beta'$, aus ϱ die $\varrho\varrho' \pm \zeta\gamma'$, aus $\varkappa$ die $\varkappa\lambda' \pm \zeta\delta'$, die $\varkappa\varkappa' \pm \zeta\varepsilon'$, aus σ die $\sigma\sigma' \pm \zeta\eta'$, und aus τ die $\tau\tau' \pm \zeta\vartheta'$, ſo ergeben ſich die einzelnen Glieder der Formel (1'). als vierte Proportionalen nach §. 15. 1.:

$$\lambda\mu' = \frac{am}{h'},\ \mu\nu' = \frac{bn}{h'},\ \nu\varrho' = \frac{cr}{h'},\ \varrho\lambda' = \frac{dk}{h'},$$

$$\sigma\varkappa' = \frac{es}{h'},\ \tau\sigma' = \frac{ft}{h'},\ \lambda\tau' = \frac{gt}{h'}.$$

Um dieſe Ausdrücke zu ſummiren, dergeſtalt, daß diejenigen zuſammengefaßt werden, welche aus Figuren von einerlei Lage gegen h' entſprungen ſind, ziehe auf jeder Seite des h', aus dem Endpunkte der entfernteſten Geraden von $\alpha\vartheta$, eine Gerade parallel und gleich der Abgrenzungslinie der nächſtfolgenden, aus dem gefundenen Punkte eine zweite Gerade unter derſelben Bedingung, und ſo fort, bis $\alpha\vartheta$ auf beiden Seiten des λ errichtet iſt, wodurch die Summenlinie a'' als Baſis des Parallelogramms hervorgeht. Man findet demnach, wenn, der Angabe gemäß, gezogen wird: $\lambda'\pi \pm \varrho\varrho'$, $\pi\Phi \pm \nu'$, $\Phi\psi \pm \mu\mu'$, und $\varkappa'\mu \pm \sigma\sigma'$, $u\omega \pm \tau\tau'$:

$\lambda\psi = \lambda\mu' + \mu\nu' + \nu\varrho' - \varrho\lambda'$,
$\lambda\omega = \sigma\kappa' + \tau\sigma' + \lambda\tau'$, alſo
$\psi\omega = \psi\lambda + \lambda\omega = a''$,
folglich $\psi\omega\omega'\psi'$ als verlangtes Parallelogramm.

49. **Aufg.** Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Nach §. 46. und §. 34. — oder nach §. 47. und §. 33., oder auch nach §. 48. und §. 32.

50. **Aufg.** Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ zu verwandeln in ein Dreieck.

1) Ohne Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente.

Aufl. Nach 39., oder auch nach §. 48. und §. 37.

2) Mit Rückſicht auf gegebene Beſtimmungs-Elemente (§. 22).

Aufl. Nach §. 50. 1. und §. 22. Sehr häufig werden §. 22. 2. und §. 22. 3. benutzt, jenachdem die Grundlinie a' oder die Höhe d' des verlangten Dreiecks gegeben iſt. Die gewöhnlichſten Fälle in dieſer Beziehung ſind folgende: Die Grundlinie a'' ſoll auf eine beſtimmte Seite des N-ecks fallen, oder auch auf eine beliebig gegebene Gerade, indem die gegenüberliegende Winkelſpitze des Dreiecks angenommen wird:

1) in einer Winkelſpitze des N-ecks;
2) innerhalb einer Seite des N-ecks;
3) innerhalb einer Seiten-Verlängerung des N-ecks:
4) innerhalb der N-ecks-Fläche;
5) außerhalb der N-ecks-Fläche,

Aufgaben, deren Vermehrung und Löſung nach §. 22. keine Schwierigkeit hat.

51. **Aufg.** Jedes N-eck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ einem gegebenen $(N \mp M)$-eck zu verähnlichen.

Aufl. Verwandle beide Figuren nach §. 49. in Quadrate. Nenne die Quadratſeite des N-ecks p, die des $(N \mp M)$-ecks q, und bringe den Satz in Anwendung: »Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten ſich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.« Hieraus entſpringt, wenn durch a und a'' zwei correſpondirende Seiten des gegebenen und des geſuchten $(N \mp M)$-ecks bezeichnet werden, offenbar folgende Proportion:

$q^2 : p^2 = a^2 : a''^2$, oder $q : p = a : a''$, alſo

$a'' = \frac{pa}{q}$, eine Formel, welche sich leicht construiren läßt, dergestalt, daß a'' auf a fällt (§. 15. 1).

Ist a'' gefunden, so ziehe aus dem gemeinschaftlichen Anfangspunkt des a, a'' Diagonalen nach sämmtlichen Winkelspitzen des $(N \mp M)$-ecks, und lege durch den Endpunkt der a'' eine Gerade bis an die nächste Diagonale oder deren Verlängerung, parallel der Zwischenseite des $(N \mp M)$-ecks; aus dem Endpunkte der eben gezogenen sodann eine zweite Gerade bis an die folgende Diagonale unter derselben Bedingung, und so fort, bis das $(N \mp M)$-eck vollendet ist, welches, wie leicht zu erweisen, der Forderung entsprechen muß.

B. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

NB. In dieser Unterabtheilung sollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Halbmesser eines Kreises durch . . . . . r.
3) Die beiden Halbmesser eines Kreisringes durch . . . . . ϱ, ϱ'.

§. 52. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweise zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung $r^2\pi = a^2$ folgt:

$$r = a\sqrt{\frac{1}{\pi}} = a.0{,}564.. = \frac{564.a}{1000}.$$

Construction nach §. 15. 1., mit Hülfe eines tausendtheiligen Maaßstabes.

§. 53. Aufg. Jedes N-eck näherungsweise zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 52.

§. 54. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisring, zu dessen Bestimmung gegeben ist:

1) Der Halbmesser ϱ des innern Randes.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = a^2$ ergiebt sich:

$$\varrho' = \sqrt{\varrho^2 + \frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\varrho^2 + a^2.0{,}318..} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{318.a}{1000}.a.}$$

eine Formel, welche leicht, mit Hülfe eines verjüngten Maaßstabes, nach §. 15. 1. und §. 15. 13. construirt werden kann.

2) Der Halbmesser ϱ' des äußern Randes.

Aufl. Man findet aus vorstehender Grundgleichung:

$$\varrho = \sqrt{\varrho'^2 - \frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\varrho'^2 - a^2.0{,}318..} = \sqrt{\varrho'^2 - \frac{318.a}{1000}.a.}$$

also die Anwendbarkeit des §. 15. 1. und §. 15. 17. Kann die Lösung der Aufgabe unmöglich werden?

§. 55. Aufg. Jedes N-eck näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 54. 1. 2.

C. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figu in eine gemiſchtlinig begrenzte.

NB. In dieſer Unterabtheilung ſollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a
2) Der Halbmeſſer eines Bogens durch . . . . . r
3) Die Grade dieſes Bogens durch . . . . . α

§. 56. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisausſchnitt, zu deſſen Beſtimmung gegeben ſind:

1) Die Grade α des Bogens.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = a^2$, alſo

$r = a\sqrt{\frac{360}{\alpha\pi}}$, woraus r am vortheilhafteſten berechnet, und dann nach §. 2. conſtruirt wird.

2) Der Halbmeſſer r des Bogens.

Aufl. Obige Grundgleichung giebt:

$\alpha = \frac{360a^2}{r^2\pi}$, woraus α mittelſt Rechnung gefunden, und nach §. 2. conſtruirt werden kann.

§. 57. Aufg. Jedes N-eck näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisausſchnitt.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 56.

§. 58. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt, von gegebenem Centriwinkel α.

Aufl. Man erhält, mittelſt der Kreislehre, die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin.}\alpha = a^2$, folglich

$r = a\sqrt{\frac{360}{\alpha\pi - 180 \cdot \operatorname{Sin.}\alpha}}$, woraus r leicht berechnet, und dann nach §. 2. conſtruirt werden kann:

§. 59. Aufg. Jedes N-eck näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 58.

II. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur.

NB. In dieſer Unterabtheilung ſollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Halbmeſſer eines Kreiſes durch . . . . . r.
3) Die beiden Halbmeſſer eines Kreisrings durch . . . . . ϱ, ϱ′.
4) Der Halbmeſſer eines Bogens durch . . . . . r′.
5) Die Grade dieſes Bogens durch . . . . . α.

1. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

60. Aufg. Jeden Kreis näherungsweiſe zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Aus der Grundgleichung $r^2\pi = a^2$ folgt

$$a = r\sqrt{\pi} = r \,.\, 1{,}772\,.\,. = r + \frac{772\,.\,r}{1000},$$

alſo die Conſtruction, mit Hülfe des tauſendtheiligen Maaßſtabes, nach §. 15. 1.

61. Aufg. Jeden Kreis näherungsweiſe in ein N-eck von beſtimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 60. und §. 51.

62. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweiſe zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = a^2$ ergiebt ſich, wenn $\sqrt{\varrho'^2 - \varrho^2} = \sigma$ geſetzt wird:

$$a = \sigma \,.\, \sqrt{\pi} = \sigma \,.\, 1{,}772\,.\,. = \sigma + \frac{772\,.\,\sigma}{1000},$$

folglich die figürliche Darſtellung nach §. 15. 1., wenn zuvor σ nach §. 15. 15. gefunden worden.

63. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweiſe in ein N-eck von beſtimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 62. und §. 51.

---

2. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

64. Aufg. Jeden Kreis zu verwandeln in einen Kreisring, zu deſſen Beſtimmung gegeben iſt:

1) Der Halbmeſſer ϱ des innern Randes.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = r^2\pi$ entſpringt $\varrho' = \sqrt{r^2 + \varrho^2}$, alſo eine Conſtruction nach §. 15. 11.

2) Der Halbmeſſer ϱ' des äußern Randes.

Aufl. Vorſtehende Grundgleichung giebt hier:

$\varrho = \sqrt{\varrho'^2 - r^2}$, folglich eine Conſtruction nach §. 15. 15.

In welchem Falle wird die Löſung der Aufgabe unmöglich?

§. 65. Aufg. Jeden Kreisring zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung des §. 64. folgt:

$r = \sqrt{\varrho'^2 - \varrho^2}$, alſo die Conſtruction nach §. 15. 15.

C. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine gemiſchtlinig begrenzte.

§. 66. Aufg. Jeden Kreis zu verwandeln in einen Kreisausſchnitt, zu deſſen Beſtimmung gegeben ſind:

1) Die Grade α des Bogens.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r'^2 \pi}{360} = r^2\pi$ ergiebt ſich

$r' = r\sqrt{\frac{360}{\alpha}}$, woraus Berechnung und Conſtr. leicht folgen (§. 2).

2) Der Halbmeſſer r' des Bogens.

Aufl. Vorſtehende Grundgleichung giebt den Bogen:

$\alpha = \frac{360 r^2}{r'^2}$, woraus, nach vollzogener Berechnung die Anwendbarkeit des §. 2. folgt.

§. 67. Aufg. Jeden Kreisring in einen, zum Theil bedingten, Kreisausſchnitt zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 65. und §. 66.

§. 68. Aufg. Jeden Kreis näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel α.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r'^2 \pi}{360} - \frac{1}{2} r'^2 \text{Sin.}\,\alpha = r^2\pi$ ergiebt ſich:

$r' = r \cdot \sqrt{\frac{360 \cdot \pi}{\alpha\pi - 180\,\text{Sin.}\,\alpha}}$.

eine Formel, welche leicht berechnet, und dann entweder nach §. 2. oder nach §. 15. 1. conſtruirt werden kann.

§. 69. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel.

Aufl. Nach §. 65. und §. 68.

III. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur.

NB. In dieser Unterabtheilung sollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Centriwinkel und der Halbmesser
   eines gegebenen Kreis- Aus- oder Abschnitts durch . . . . . α, r.
   eines gesuchten Kreis- Aus- oder Abschnitts durch . . . . . α', r'.
3) Der Halbmesser eines gesuchten Kreises durch . . . . . r'.

A. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

§. 70. Aufg. Jeden Kreisausschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = a^2$, also

$a = r\sqrt{\frac{\alpha\pi}{360}}$, ein Ausdruck, welcher leicht berechnet, und dann nach §. 2. construirt werden kann.

§. 71. Aufg. Jeden Kreisausschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein N-eck von bestimmter Form.

Aufl. Nach §. 70. und §. 51.

§. 72. Aufg. Jeden Kreisabschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \text{Sin.}\,\alpha = a^2$ giebt:

$a = r\sqrt{\frac{\alpha\pi}{360} - \frac{1}{2}\text{Sin.}\,\alpha}$, folglich, nach vollzogener Berechnung, die Anwendbarkeit des §. 2.

§. 73. Aufg. Jeden Kreisabschnitt näherungsweise in ein N-eck von bestimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 72. und §. 51.

B. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

§. 74. Aufg. Jeden Kreisausschnitt zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = r'^2\pi$ folgt:

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{360}}$, also, nach ausgeführter Berechnung, die Anwendung des §. 2. oder des §. 15. 1.

§. 75. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 74. und §. 64.

§. 76. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = r'^2\pi$ entſpringt:

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{360} - \frac{\operatorname{Sin}.\alpha}{2\pi}}$, folglich Berechnung u. Anwendung des §. 2.

§. 77. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 76. und §. 64.

C. Verwandlung einer gemiſchtlinig begrenzten Figur in eine gemiſchtlinig begrenzte.

§. 78. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt zu verwandeln in einen Kreisausſchnitt.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360}$, folglich

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}$ und $\alpha' = \frac{\alpha r^2}{r'^2}$,

Formeln, aus denen r' und α', jenachdem α' oder r' gegeben iſt, leicht berechnet und mittelſt §. 2. conſtruirt werden können.

§. 79. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel α'.

Aufl. Berechne r' aus der Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r'^2 \operatorname{Sin}\alpha'$, und conſtruire das Reſultat nach §. 2.

§. 80. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen zum Theil, durch α' oder r', beſtimmten Kreisausſchnitt.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360}$, woraus r' oder α' berechnet, und dann nach §. 2. conſtruirt wird.

§. 81. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel α'.

Aufl. Berechne r' aus der Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r'^2 \operatorname{Sin}.\alpha'$,

und conſtruire das Reſultat nach §. 2.

Zweite Abtheilung.

Verwandlung geometrischer Figuren.

Zweiter Abschnitt.

Verwandlung zweier oder mehrerer Figuren in Eine von bestimmter Form, durch Summirung und Differenzirung der Flächen-Inhalte.

I. Verwandlung zweier oder mehrerer geradlinig begrenzter Figuren in Eine.

A. In eine geradlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In ein Quadrat.

§. 82. Aufg. Die Summe gegebener Quadrate in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Nenne die Seiten der m gegebenen Quadrate a, b, c, d ..., die des gesuchten x, so ergiebt sich die Grundgleichung:

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots$, aus welcher man findet:

für den Fall der Ungleichheit:

$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +}$. (1).;

für den Fall der Gleichheit:

$x = \sqrt{ma^2} = \sqrt{ma \cdot a}$ (2).

zwei Formeln, deren erstere nach §. 15. 20., letztere nach §. 15. 9. construirt wird.

§. 83. Aufg. Die Differenz gegebener Quadrate in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Construire, wenn mehrere additive und subtractive Quadrate gegeben sind, von beiderlei Arten die Summen-Quadrate nach §. 82. Setze die Seite des additiven Summen-Quadrats $= g$, die des subtractiven $= k$, so ergiebt sich, der Bedingung gemäß, die Grundgleichung:

$x^2 = g^2 - k^2$, folglich

$x = \sqrt{g^2 - k^2}$, also

die Construction nach §. 15. 15.

NB. In welchem Falle wird $x = o$, in welchem unmöglich?

$a'' = \frac{pa}{q}$, eine Formel, welche sich leicht construiren läßt, dergestalt, daß a'' auf a fällt (§. 15. 1).

Ist a'' gefunden, so ziehe aus dem gemeinschaftlichen Anfangspunkt des a, a'' Diagonalen nach sämmtlichen Winkelspitzen des $(N \mp M)$-ecks, und lege durch den Endpunkt der a'' eine Gerade bis an die nächste Diagonale oder deren Verlängerung, parallel der Zwischenseite des $(N \mp M)$-ecks; aus dem Endpunkte der eben gezogenen sodann eine zweite Gerade bis an die folgende Diagonale unter derselben Bedingung, und so fort, bis das $(N \mp M)$-eck vollendet ist, welches, wie leicht zu erweisen, der Forderung entsprechen muß.

3. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

NB. In dieſer Unterabtheilung ſollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Halbmeſſer eines Kreiſes durch . . . . . r.
3) Die beiden Halbmeſſer eines Kreisringes durch . . . . . ϱ, ϱ'.

§. 52. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung $r^2\pi = a^2$ folgt:

$$r = a\sqrt{\frac{1}{\pi}} = a.0{,}564.. = \frac{564.a}{1000}.$$

Conſtruction nach §. 15. 1., mit Hülfe eines tauſendtheiligen Maaßſtabes.

§. 53. Aufg. Jedes N-eck näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 52.

§. 54. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisring, zu deſſen Beſtimmung gegeben iſt:

1) Der Halbmeſſer ϱ des innern Randes.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = a^2$ ergiebt ſich:

$$\varrho' = \sqrt{\varrho^2 + \frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\varrho^2 + a^2.0{,}318..} = \sqrt{\varrho^2 + \frac{318.a}{1000}.a}.$$

eine Formel, welche leicht, mit Hülfe eines verjüngten Maaßſtabes, nach §. 15. 1. und §. 15. 13. conſtruirt werden kann.

2) Der Halbmeſſer ϱ' des äußern Randes.

Aufl. Man findet aus vorſtehender Grundgleichung:

$$\varrho = \sqrt{\varrho'^2 - \frac{a^2}{\pi}} = \sqrt{\varrho'^2 - a^2.0{,}318..} = \sqrt{\varrho'^2 - \frac{318.a}{1000}.a}.$$

alſo die Anwendbarkeit des §. 15. 1. und §. 15. 17. Kann die Löſung der Aufgabe unmöglich werden?

§. 55. Aufg. Jedes N-eck näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 54. 1. 2.

C. Verwandlung einer geradlinig begrenzten Figur in eine gemischtlinig begrenzte.

NB. In dieser Unterabtheilung sollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Halbmesser eines Bogens durch . . . . . r.
3) Die Grade dieses Bogens durch . . . . . α.

§. 56. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisausschnitt, zu dessen Bestimmung gegeben sind:

1) Die Grade α des Bogens.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = a^2$, also

$r = a\sqrt{\frac{360}{\alpha\pi}}$, woraus r am vortheilhaftesten berechnet, und dann nach §. 2. construirt wird.

2) Der Halbmesser r des Bogens.

Aufl. Obige Grundgleichung giebt:

$\alpha = \frac{360a^2}{r^2\pi}$, woraus α mittelst Rechnung gefunden, und nach §. 2. construirt werden kann.

§. 57. Aufg. Jedes N-eck näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisausschnitt.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 56.

§. 58. Aufg. Jedes Quadrat näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisabschnitt, von gegebenem Centriwinkel α.

Aufl. Man erhält, mittelst der Kreislehre, die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin.}\alpha = a^2$, folglich

$r = a\sqrt{\frac{360}{\alpha\pi - 180 \cdot \operatorname{Sin.}\alpha}}$, woraus r leicht berechnet, und dann nach §. 2. construirt werden kann:

§. 59. Aufg. Jedes N-eck näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisabschnitt von gegebenem Centriwinkel.

Aufl. Nach §. 43., §. 49. und §. 58.

II. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur.

NB. In dieſer Unterabtheilung ſollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.
2) Der Halbmeſſer eines Kreiſes durch . . . . . r.
3) Die beiden Halbmeſſer eines Kreisrings durch . . . . . ϱ, ϱ′.
4) Der Halbmeſſer eines Bogens durch . . . . . r′.
5) Die Grade dieſes Bogens durch . . . . . α.

A. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

§. 60. Aufg. Jeden Kreis näherungsweiſe zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Aus der Grundgleichung $r^2\pi = a^2$ folgt

$$a = r\sqrt{\pi} = r \,.\, 1{,}772\,.\,. = r + \frac{772\,.\,r}{1000},$$

alſo die Conſtruction, mit Hülfe des tauſendtheiligen Maaßſtabes, nach §. 15. 1.

§. 61. Aufg. Jeden Kreis näherungsweiſe in ein N-eck von beſtimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 60. und §. 51.

§. 62. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweiſe zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = a^2$ ergiebt ſich, wenn $\sqrt{\varrho'^2 - \varrho^2} = \sigma$ geſetzt wird:

$$a = \sigma\,.\,\sqrt{\pi} = \sigma \,.\, 1{,}772\,.\,. = \sigma + \frac{772\,.\,\sigma}{1000},$$

folglich die figürliche Darſtellung nach §. 15. 1., wenn zuvor σ nach §. 15. 15. gefunden worden.

§. 63. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweiſe in ein N-eck von beſtimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 62. und §. 51.

B. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

§. 64. Aufg. Jeden Kreis zu verwandeln in einen Kreisring, zu deſſen Beſtimmung gegeben iſt:

1) Der Halbmeſſer ϱ des innern Randes.

Aufl. Aus der Grundgleichung $(\varrho'^2 - \varrho^2)\pi = r^2\pi$ entſpringt $\varrho' = \sqrt{r^2 + \varrho^2}$, alſo eine Conſtruction nach §. 15. 11.

2) Der Halbmesser ϱ' des äußern Randes.

Aufl. Vorstehende Grundgleichung giebt hier:

$\varrho = \sqrt{\varrho'^2 - r^2}$, folglich eine Construction nach §. 15. 15.

In welchem Falle wird die Lösung der Aufgabe unmöglich?

§. 65. Aufg. Jeden Kreisring zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung des §. 64. folgt:

$r = \sqrt{\varrho'^2 - \varrho^2}$, also die Construction nach §. 15. 15.

C. Verwandlung einer krummlinig begrenzten Figur in eine gemischtlinig begrenzte.

§. 66. Aufg. Jeden Kreis zu verwandeln in einen Kreisausschnitt, zu dessen Bestimmung gegeben sind:

1) Die Grade α des Bogens.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r'^2 \pi}{360} = r^2\pi$ ergiebt sich

$r' = r\sqrt{\frac{360}{\alpha}}$, woraus Berechnung und Constr. leicht folgen (§. 2).

2) Der Halbmesser r' des Bogens.

Aufl. Vorstehende Grundgleichung giebt den Bogen:

$\alpha = \frac{360 r^2}{r'^2}$, woraus, nach vollzogener Berechnung die Anwendbarkeit des §. 2. folgt.

§. 67. Aufg. Jeden Kreisring in einen, zum Theil bedingten, Kreisausschnitt zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 65. und §. 66.

§. 68. Aufg. Jeden Kreis näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisabschnitt von gegebenem Centriwinkel α.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r'^2 \pi}{360} - \frac{1}{2} r'^2 \operatorname{Sin.} \alpha = r^2\pi$ ergiebt sich:

$$r' = r \cdot \sqrt{\frac{360 \cdot \pi}{\alpha\pi - 180 \operatorname{Sin.} \alpha}}.$$

eine Formel, welche leicht berechnet, und dann entweder nach §. 2. oder nach §. 15. 1. construirt werden kann.

§. 69. Aufg. Jeden Kreisring näherungsweise zu verwandeln in einen Kreisabschnitt von gegebenem Centriwinkel.

Aufl. Nach §. 65. und §. 68.

III. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur.

NB. In dieser Unterabtheilung sollen bezeichnet werden:

1) Die Seite eines Quadrats durch . . . . . a.

2) Der Centriwinkel und der Halbmesser
eines gegebenen Kreis- Aus- oder Abschnitts durch . . . . . α, r.
eines gesuchten Kreis- Aus- oder Abschnitts durch . . . . . α', r'.

3) Der Halbmesser eines gesuchten Kreises durch . . . . . r'.

A. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur in eine geradlinig begrenzte.

§. 70. Aufg. Jeden Kreisausschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = a^2$, also

$a = r\sqrt{\frac{\alpha\pi}{360}}$, ein Ausdruck, welcher leicht berechnet, und dann nach §. 2. construirt werden kann.

§. 71. Aufg. Jeden Kreisausschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein N-eck von bestimmter Form.

Aufl. Nach §. 70. und §. 51.

§. 72. Aufg. Jeden Kreisabschnitt näherungsweise zu verwandeln in ein Quadrat.

Aufl. Die Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin.}\alpha = a^2$ giebt:

$a = r\sqrt{\frac{\alpha\pi}{360} - \frac{1}{2}\operatorname{Sin.}\alpha}$, folglich, nach vollzogener Berechnung, die Anwendbarkeit des §. 2.

§. 73. Aufg. Jeden Kreisabschnitt näherungsweise in ein N-eck von bestimmter Form zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 72. und §. 51.

B. Verwandlung einer gemischtlinig begrenzten Figur in eine krummlinig begrenzte.

§. 74. Aufg. Jeden Kreisausschnitt zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung $\frac{\alpha r^2\pi}{360} = r'^2\pi$ folgt:

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{360}}$, also, nach ausgeführter Berechnung, die Anwendung des §. 2. oder des §. 15. 1.

§. 75. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 74. und §. 64.

§. 76. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreis.

Aufl. Aus der Grundgleichung

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = r'^2\pi$ entſpringt:

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{360} - \frac{\operatorname{Sin}.\alpha}{2\pi}}$, folglich Berechnung u. Anwendung des §. 2.

§. 77. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisring.

Aufl. Nach §. 76. und §. 64.

C. Verwandlung einer gemiſchtlinig begrenzten Figur in eine gemiſchtlinig begrenzte.

§. 78. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt zu verwandeln in einen Kreisausſchnitt.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360}$, folglich

$r' = r\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}$ und $\alpha' = \frac{\alpha r^2}{r'^2}$,

Formeln, aus denen r' und α', jenachdem α' oder r' gegeben iſt, leicht berechnet und mittelſt §. 2. conſtruirt werden können.

§. 79. Aufg. Jeden Kreisausſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel α'.

Aufl. Berechne r' aus der Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r'^2 \operatorname{Sin}.\alpha'$, und conſtruire das Reſultat nach §. 2.

§. 80. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen zum Theil, durch α' oder r', beſtimmten Kreisausſchnitt.

Aufl. Man erhält die Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360}$, woraus r' oder α' berechnet, und dann nach §. 2. conſtruirt wird.

§. 81. Aufg. Jeden Kreisabſchnitt näherungsweiſe zu verwandeln in einen Kreisabſchnitt von gegebenem Centriwinkel α'.

Aufl. Berechne r' aus der Grundgleichung:

$\frac{\alpha r^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{Sin}.\alpha = \frac{\alpha' r'^2\pi}{360} - \frac{1}{2}r'^2 \operatorname{Sin}.\alpha'$,

und conſtruire das Reſultat nach §. 2.

Zweite Abtheilung.

Verwandlung geometrischer Figuren.

Zweiter Abschnitt.

Verwandlung zweier oder mehrerer Figuren in Eine von bestimmter Form, durch Summirung und Differenzirung der Flächen-Inhalte.

I. Verwandlung zweier oder mehrerer geradlinig begrenzter Figuren in Eine.

A. In eine geradlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In ein Quadrat.

§. 82. **Aufg.** Die Summe gegebener Quadrate in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Nenne die Seiten der m gegebenen Quadrate a, b, c, d..., die des gesuchten x, so ergiebt sich die Grundgleichung:

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ldots$, aus welcher man findet:

für den Fall der Ungleichheit:

$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +}$. (1).;

für den Fall der Gleichheit:

$x = \sqrt{ma^2} = \sqrt{ma \,.\, a}$ (2).

zwei Formeln, deren erstere nach §. 15. 20., letztere nach §. 15. 9. construirt wird.

§. 83. **Aufg.** Die Differenz gegebener Quadrate in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Construire, wenn mehrere additive und subtractive Quadrate gegeben sind, von beiderlei Arten die Summen-Quadrate nach §. 82. Setze die Seite des additiven Summen-Quadrats $= g$, die des subtractiven $= k$, so ergiebt sich, der Bedingung gemäß, die Grundgleichung:

$x^2 = g^2 - k^2$, folglich

$x = \sqrt{g^2 - k^2}$, also

die Construction nach §. 15. 15.

NB. In welchem Falle wird $x = o$, in welchem unmöglich?

§. 84. Aufg. Die Summe gegebener ähnlicher N-ecke in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Bezeichnet man die m gegebenen einander ähnlichen N-ecke durch (A), (B), (C), (D) ꝛc., gleichliegende Seiten derselben durch a, b, c, d..., die diesen Seiten correspondirende Seite einer ähnlichen Summen-Figur (S) durch s; das Quadrat von (A) durch A^2, und das von (S) durch S^2, so ergiebt sich leicht, mittelst eines bekannten geometrischen Satzes, für den Fall der Ungleichheit:

$s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + ..$ (1). und

$S^2 : A^2 = s^2 : a^2$, also

$S = \frac{As}{a}$ (2).

Für den Fall der Gleichheit:

$s = \sqrt{ma^2} = \sqrt{ma \cdot a}$ (1').

$S = \frac{As}{a}$ (2').

Formeln, welche leicht nach §. 15. 20., §. 15. 1. und §. 15. 9. construirt werden können, wenn zuvor die Seite A nach §. 49. bestimmt wird.

§. 85. Aufg. Die Differenz gegebener ähnlicher N-ecke in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Es ergiebt sich, nach der Bezeichnung des §. 84., für den Fall, daß (A) und (B) additiv, (C) und (D) subtractiv gesetzt werden:

$s = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$ (1). nach §. 15. 21.

$S = \frac{A \cdot s}{a}$ (2). nach §. 15. 1. — die Seite A nach §. 49.

NB. Kann die Lösung der Aufgabe unmöglich werden?

§. 86. Aufg. Die Summe beliebiger geradlinig begrenzter Figuren in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Verwandle jede der gegebenen Figuren nach §. 49. in ein Quadrat, und suche dann die Seite des Summen-Quadrats nach §. 82.

§. 87. Aufg. Die Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Construire, wie vorher, die einzelnen Quadrate nach §. 49., und bestimme dann mittelst §. 83. die Seite des Differenz-Quadrats.

b) In ein N-eck von bestimmter Form.

§. 88. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate in Form eines N-ecks darzustellen.

Aufl. Nach §. 82. und §. 51. — oder nach §. 83. und §. 51.

§. 89. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke in Form eines N- oder M-ecks darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 84. und §. 51. — oder nach §. 85. und §. 51.

§. 90. Aufg. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren in Form eines N-ecks darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 86. und §. 51. — oder nach §. 87. und §. 51.

B. In eine krummlinig begrenzte von beſtimmter Form.

a) In einen Kreis.

§. 91. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweiſe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 82. und §. 52. — oder nach §. 83. und §. 52.

§. 92. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweiſe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 84. und §. 52. — oder nach §. 85. und §. 52.

§. 93. Aufg. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren näherungsweiſe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 86. und §. 52. — oder nach §. 87. und §. 52.

b) In einen Kreisring.

§. 94. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweiſe in Form eines Kreisringes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 82. und §. 54. — oder nach §. 83. und §. 54.

§. 95. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweiſe in Form eines Kreisringes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 84. und §. 54. — oder nach §. 85. und §. 54

§. 96. Aufg. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren näherungsweiſe in Form eines Kreisringes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 86. und §. 54. — oder nach §. 87. und §. 54.

C. In eine gemiſchtlinig begrenzte von beſtimmter Form.

a) In einen Kreisausſchnitt.

§. 97. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweiſe in Form eines Kreisausſchnittes darzuſtellen

Aufl. Nach §. 82. und §. 56. — oder nach §. 83. und §. 56.

§. 98. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweise in Form eines Kreisausschnittes darzustellen.

Aufl. Nach §. 84. und §. 56. — oder nach §. 85. und §. 56.

§. 99. Aufg. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren näherungsweise in Form eines Kreisausschnittes darzustellen.

Aufl. Nach §. 86. und §. 56. — oder nach §. 87. und §. 56.

b) In einen Kreisabschnitt.

§. 100. Die Summe oder Differenz gegebener Quadrate näherungsweise in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. Nach §. 82. und §. 58. — oder nach §. 83. und §. 58.

§. 101. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener ähnlicher N-ecke näherungsweise in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. Nach §. 84. und §. 58. — oder nach §. 85. und §. 58.

§. 102. Aufg. Die Summe oder Differenz beliebiger geradlinig begrenzter Figuren in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. Nach §. 86. und §. 58. — oder nach §. 87. und §. 58.

I. Verwandlung zweier oder mehrerer krummlinig begrenzter Figuren in Eine.

1. In eine krummlinig begrenzte von beſtimmter Form.

a) In einen Kreis.

§. 103. Aufg. Die Summe gegebener Kreiſe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Bezeichne die Halbmeſſer der gegebenen Kreiſe durch a, b, c, d . . , den des geſuchten durch x, die Anzahl der erſten durch m, ſo ergiebt ſich die Grundgleichung:

$x^2\pi = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ..)\pi$, woraus folgt:

für den Fall der Ungleichheit:

$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ..}$ (1).

Für den Fall der Gleichheit:

$x = \sqrt{ma^2} = \sqrt{ma \cdot a}$ (2)., und demgemäß

die Conſtruction entweder nach §. 15. 20. oder nach §. 15. 9.

104. Aufg. Die Differenz gegebener Kreiſe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Suche nach §. 103. ſowohl den Summen-Kreis der additiven, als den der ſubtractiven Kreiſe. Nenne den Halbmeſſer des erſtern g, den des letztern k, ſo entſteht die Grundgleichung $x^2\pi = (g^2 - k^2)\pi$, woraus ſich ergiebt:

$x = \sqrt{g^2 - k^2}$, alſo die Conſtruction nach §. 15. 15.

NB. In welchem Falle iſt die Löſung der Aufgabe unmöglich?

105. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 65. und §. 103. — oder nach §. 65. und §. 104.

106. Aufg. Die Summe oder Differenz eines gegebenen Kreiſes und Kreisringes in Form eines Kreiſes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 65., §. 103. und §. 104.

b) In einen Kreisring.

§. 107. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreiſe in Form eines Kreisringes darzuſtellen.

Aufl. Nach §. 103. und §. 64. — oder nach §. 104. und §. 64.

§. 108. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe in Form eines Kreisringes darzustellen.

Aufl. Nach §. 105. und §. 64.

§. 109. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe in Form eines Kreisringes darzustellen.

Aufl. Nach §. 106. und §. 64.

B. In eine geradlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In ein Quadrat.

§. 110. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Nach §. 103. und §. 60. — oder nach §. 104. und §. 60.

§. 111. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Nach §. 105. und §. 60.

§. 112. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.

Aufl. Nach §. 106. und §. 60.

b) In ein N-eck von bestimmter Form.

§. 113. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

Aufl. Nach §. 103. und §. 61. — oder nach §. 104. und §. 61.

§. 114. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisringe näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

Aufl. Nach §. 105. und §. 61.

§. 115. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreise und Kreisringe näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.

Aufl. Nach §. 106. und §. 61.

---

129. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.
Aufl. Analog dem Verfahren unter §. 128.

130. Aufg. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Quadrats darzustellen.
Aufl. wie vorher.

b) In ein N-eck von bestimmter Form.

131. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.
Aufl. Nach §. 128. und §. 51.

132. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.
Aufl. Nach §. 129. und §. 51.

133. Aufg. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines N-ecks darzustellen.
Aufl. Nach §. 130. und §. 51.

In eine gemischtlinig begrenzte von bestimmter Form.

a) In einen Kreisausschnitt.

134. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte in Form eines Kreisausschnittes darzustellen.
Aufl. Durch Bildung der Summen- oder Differenz-Gleichung und Anwendung des §. 78.

135. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte näherungsweise in Form eines Kreisausschnittes darzustellen.
Aufl. Berechne näherungsweise den Summen- oder Differenz-Gehalt der Abschnitte, und wende §. 80. an.

136. Aufg. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreisausschnittes darzustellen.
Aufl. Analog dem Verfahren unter §. 135.

b) In einen Kreisabschnitt.

§. 137. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisausschnitte näherungsweise in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. Berechne den Summen- oder Differenz-Gehalt der Abschnitte, und wende §. 79. an.

§. 138. Aufg. Die Summe oder Differenz gegebener Kreisabschnitte in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. Analog dem Verfahren unter §. 137.

§. 139. Aufg. Die Summe oder Differenz beiderlei Kreisstücke näherungsweise in Form eines Kreisabschnittes darzustellen.

Aufl. wie zuvor.

Dritte Abtheilung.

heilung geometriſcher Figuren.

Erſter Abſchnitt.

eilung gerader Linien und geradlinig begrenzter Figuren.

I. Theilung gerader Linien nach beſtimmten Verhältniſſen.

NB. In dieſer Unterabtheilung findet man bezeichnet:

1) Die linearen oder numeriſchen Verhältnißgrößen der Theilung durch p', p'', p''' etc.
2) Die Summe aller Verhältnißgrößen durch . . . . . p_n
3) Die Summe von m aufeinanderfolgenden Verhältnißgrößen, wobei m auch $= 1$ ſeyn kann, durch . . . . . p_m
4) Die Summe der Quadrate aller einzelnen Verhältnißgrößen in p_n, p_m durch . . . . . p_n^2, p_m^2.
5) Jede zu theilende Gerade durch . . . . . a.
6) Die verlangten Theile ſelbſt durch . . . . . a', a'', a''' etc.
7) Die Summe von m aufeinanderfolgenden Theilen, entſprechend dem p_m, durch . . . . . a_m.

§. 140. Aufg. (Fig. 71). Jede Gerade $o\alpha = a$ in n Theile zu theilen, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$ etc.

Aufl. Man erhält für jeden Summentheil a_m die allgemeine Proportion:

$$a_m : a = p_m : p_n, \text{ folglich}$$

$$a_m = \frac{p_m a}{p_n} \quad (1),$$

eine Formel, deren Conſtruction nach §. 15. 1. leicht auf nachſtehende Weiſe ausgeſprochen werden kann:

»Lege an $o\alpha$ eine Gerade $o\Phi$ von willkürlicher Neigung und unbe»ſtimmter Länge; trage darauf von o aus die gegebenen Verhältniß»größen, in beliebiger Verjüngung (§. 2.), nach einander ab; ver»binde den Endpunkt der letzten Auftragung durch eine Gerade mit α, »und ziehe aus den übrigen Zwiſchenpunkten der $o\Phi$ auf die $o\alpha$ »Gerade, parallel der genannten Verbindungslinie, ſo werden die »dadurch gefundenen Zwiſchenpunkte in $o\alpha$ die Abgrenzungspunkte

»der geſuchten Theile bilden,« eine Behauptung, deren Richtigkeit ſich ſowohl aus §. 15. 1. vermittelſt der Formel (1)., als auch ſynthetiſch mittelſt eines bekannten Satzes der Geometrie nachweiſen läßt. In Fig. 71. iſt die Gerade $o\alpha$, dieſer Anweiſung gemäß, in vier Theile zerlegt worden, denn man hat auf $o\Phi$ abgetragen:

$o\pi_1 = p'$, $\pi_1\pi_2 = p''$, $\pi_2\pi_3 = p'''$, $\pi_3\pi_4 = p^{IV}$;

ferner die $\pi_4\alpha$ gezogen, und dieſer parallel die Geraden:

$\pi_1\tau_1$, $\pi_2\tau_2$, $\pi_3\tau_3$,

wodurch nach §. 15. 1. entſtanden:

$o\tau_1 : \tau_1\tau_2 : \tau_2\tau_3 : \tau_3\alpha = p' : p'' : p''' : p^{IV}$ w. z. b. w.

NB. Für eine geforderte Gleichtheilung erleidet die vorſtehende Conſtructions-Methode keine weſentliche Abänderung. Jede der gleichen Verhältnißgrößen kann in dieſem Falle durch eine beliebige Gerade repräſentirt werden, welche bei verlangter n Theilung nmal auf $o\varphi$ abzutragen iſt.

§. 141. Aufg. (Fig. 72). Jede Gerade $o\alpha = a$ in n Theile zu theilen, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Man erhält, obiger Bezeichnung gemäß, für jeden Summentheil a_m die allgemeine Proportion:

$a_m : a = p_m^2 : p_n^2$, folglich

$$a_m = \frac{p_m^2 a}{p_n^2} \quad (1).,$$

eine Formel, welche ſowohl nach §. 15. 3., als auch nach §. 15. 1., d. h. nach §. 140. conſtruirt werden kann, wenn in letzterer Beziehung gerade Linien ſubſtituirt werden, welche ſich zu einander verhalten, wie die gegebenen Quadrate. Dergleichen Gerade ergeben ſich aber

1) vermittelſt des Satzes: »Dreiecke oder Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien,« woraus folgt, daß man die gegebenen Quadrate nur in Dreiecke (37. 2.) oder in Rechtecke (§. 23.) von gleichen Höhen verwandeln, und die erzeugten Grundlinien ſtatt der Verhältnißquadrate ſubſtituiren dürfe, um die Löſung der Aufgabe nach §. 140. zu bewerkſtelligen.

2) Vermittelſt des Satzes: »Jede Kreisſehne, welche als Hypotenuſe den Endpunkt eines Durchmeſſers mit dem Endpunkte eines auf demſelben errichteten Perpendikels verbindet, iſt die mittlere Proportionale zwiſchen dem ganzen Durchmeſſer und dem ihr anliegenden Abſchnitt,« woraus hervorgeht, daß die conſtructionelle Löſung der Aufgabe nach §. 140. ausgeführt werden könne, wenn man

über einer beliebigen Geraden, jedoch nicht kleiner als die Seite des größten der gegebenen Quadrate, einen Halbkreis beſchreibt; ſodann die einzelnen Quadratſeiten p', p'', p''' etc. von einem Endpunkt des Durchmeſſers aus, als Sehnen in denſelben überträgt, und aus den Endpunkten der Sehnen Perpendikel auf den Durchmeſſer fällt, wodurch offenbar die oben charakteriſirten Abſchnitte gefunden ſind. In Fig. 72. iſt die Gerade $o\alpha = a$, dieſer Anweiſung gemäß, in drei Theile zerlegt worden. Denn man hat über der Geraden $o\psi$ einen Halbkreis beſchrieben, und in demſelben von o aus die Sehnen

$o\pi_1 = p'$, $o\pi_2 = p''$, $o\pi_3 = p'''$ gezogen;

ſodann aus π_1, π_2, π_3 die Perpendikel

$\pi_1\varrho_1$, $\pi_2\varrho_2$, $\pi_3\varrho_3$ auf den Durchmeſſer $o\psi$ gefällt,

wodurch obigem Satze zufolge die geſuchten Abſchnitte, zur Stellvertretung der gegebenen Quadrate, entſtanden ſind, nämlich:

$o\varrho_1 : o\varrho_2 : o\varrho_3 = p'^2 : p''^2 : p'''^2$.

Endlich dieſe Abſchnitte nach §. 140. auf $o\Phi$ abgetragen:

$o\sigma_1 = o\varrho_1$, $\sigma_1\sigma_2 = o\varrho_2$, $\sigma_2\sigma_3 = o\varrho_3$.

Dann die Gerade $\alpha\sigma_3$, und dieſer parallel die $\sigma_1\tau_1$, $\sigma_2\tau_2$ gezogen, wodurch die verlangte Dreitheilung vollendet wurde:

$\sigma\tau_1 : \tau_1\tau_2 : \tau_2\alpha = o\varrho_1 : o\varrho_2 : o\sigma_3$, d. h.

$a' : a'' : a''' = p'^2 : p''^2 : p'''^2$ w. z. b. w.

§. 142. **Aufg.** Jede Gerade in n Theile zu theilen, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Wähle eine beliebige Gerade g als Einheit, und conſtruire nach §. 15. 9. die mittleren Proportionalen:

$q' = \sqrt{gp'}$, $q'' = \sqrt{gp''}$, $q''' = \sqrt{gp'''}$ etc., wodurch offenbar die fortlaufende Proportion:

$q' : q'' : q''' : \text{etc.} = \sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc. entſteht,

und demgemäß die Löſung der Aufgabe nach §. 140. ausführbar iſt, wenn q', q'', q''' etc. zur Stellvertretung der Wurzelgrößen gewählt werden.

§. 143. **Aufg.** Jede Gerade a ins äußere und mittlere Verhältniß, d. h. dergeſtalt zu theilen, daß ſich der eine Theil zum andern verhalte, wie dieſer andere Theil zur ganzen Linie.

Aufl. Man erhält, wenn die beiden Theile durch a', a'' bezeichnet werden, die Proportion:

$a'' : a' = a' : a$, oder, weil $a'' = a - a'$ iſt:

$(a - a') : a' = a' : a$,

woraus ſich ergiebt:

$$a' = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{2}a^2},$$

eine nach §. 15. 22. leicht conſtruirbare Formel.

NB. Eine große Menge anderer Aufgaben über Linien-Theilung findet man in folgenden zwei Werken, von welchen erſteres nach der Methode der Alten, letzteres nach neueren Prinzipien bearbeitet iſt:

1) Die Bücher des Apollonius von Perga: de sectione determinata, wiederhergeſtellt von R. Simſon, und die angehängten Bücher des letztern, nach dem Lateiniſchen frei bearbeitet von Dr. W. A. Dieſterweg ꝛc. Bonn bei Bohres 1822.

2) Die Bücher des Apollonius von Perga: de sectione determinata, analytiſch bearbeitet und durch einen Anhang von ſehr vielen Aufgaben ähnlicher Art vermehrt von M. G. Grabow. Frankfurt a. M. bei Hermann 1828.

I. Theilung geradlinig begrenzter Figuren nach beſtimmten Verhältniſſen.

NB. In dieſer Unterabtheilung findet man bezeichnet:

) Die linearen oder numeriſchen Verhältnißgrößen der Theilung durch p', p'', p''' etc.
) Die Summe aller Verhältnißgrößen durch . . . . . p_n
) Die Summe von m aufeinanderfolgenden Verhältnißgrößen, wobei m auch $= 1$ ſeyn kann, durch . . . . . p_m
) Die Inhalte der geſuchten Figurentheile, entſprechend den Verhältnißgrößen p', p'', p''' etc. durch . . . . . J', J'', J''' etc.
) Die Summe aller Figurentheile, d. h. den Inhalt der zu theilenden Figur durch . . . . . J_n
) Die Summe von m aufeinanderfolgenden Figurentheilen, entſprechend der Verhältnißgröße p_m durch . . . . . J_m

1) Sämmtliche Theilungslinien ſollen ſich in einem Punkte o ſchneiden, welcher gegeben iſt.

α) In einer Winkelſpitze des N-ecks.

144. Aufg. (Fig. 73). Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 140. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien,« d. h.

»Zerlege die dem Punkt o gegenüberliegende Seite in die verhältnißgemäßen Abſchnitte (§. 140.), und verbinde die gefundenen »Zerlegungspunkte mit o durch Gerade, ſo werden dieſe der Aufgabe Genüge leiſten.«

Wird die Gegenſeite des o durch a, der zur mten Theilungslinie gehörige Abſchnitt auf derſelben durch a_m bezeichnet, ſo ergiebt ſich offenbar für jede mte Theilungslinie der n Theilung die allgemeine Beſtimmungsformel:

$$a_m = \frac{p_m a}{p_n} \quad (1).,$$

welche den obigen Wortausdruck des conſtructionellen Verfahrens ſymboliſch vor Augen ſtellt.

In Figur 73. iſt das Dreieck $\alpha o \beta$, vorſtehender Anweiſung gemäß, in fünf gleiche Theile getheilt worden, denn man hat die Seite $\alpha\beta$

in fünf gleiche Theile zerlegt, und die Theilungspunkte $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ mit der Winkelſpitze o durch Gerade verbunden.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 145. Aufg. (Fig. 74. 75). Jedes Vier-, Fünf-, überhaupt N-eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p'''$ etc.

Aufl. 1. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 50. und §. 22. 1. d. h.: »Verwandle das gegebene N-eck in ein Dreieck, ſo daß eine der »Winkelſpitzen in o, die derſelben gegenüberſtehende Grundlinie aber »auf eine der N-ecksſeiten zu liegen kommt (§. 37. §. 50). Zer»lege dieſes Dreieck von o aus in die verhältnißgemäßen Stücke »(§. 144. 1.), und trage diejenigen Theilungslinien, deren Fuß»punkte außerhalb der N-ecksgrenze gefallen ſind, mittelſt Anwendung »des §. 22. 1., auf die nächſtgelegene N-ecksſeite über.

In Figur 74. iſt das Viereck $\alpha\beta\gamma\vartheta$, dieſer Anweiſung gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\tau_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$, in vier Theile zerlegt worden, entſprechend den Verhältnißgrößen p', p'', p''', p^{IV}. Denn man hat daſſelbe, durch Ziehung der $\gamma\vartheta \mp o\beta$, in das Dreieck $\alpha o\vartheta$ verwandelt (§. 37.), die Grundline $\alpha\vartheta$ in die verhältnißgemäßen Abſchnitte zerlegt (§. 140.), und die Fußpunkte τ_2, τ_3 der zweiten und dritten Theilungslinie $o\tau_2$, $o\tau_3$, vermittelſt der Geraden $\tau_2\sigma_2$, $\tau_3\sigma_3$, parallel der $o\beta$, auf die Viereckſeite $\beta\gamma$ übergetragen.

Aufl. 2. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 3., d. h.: »Zerlege das gegebene N-eck vom Punkte o aus in die möglichſt »kleinſte Anzahl von Dreiecken, und forme letztere nach §. 22. 3. »ſo um, daß ſie gleiche Höhen erhalten, wodurch die Inhaltsver»hältniſſe der Dreiecke auf die Längenverhältniſſe der erzeugten Grund»linien zurückgeführt ſind. Summire demnach die gefundenen Grund»linien (§. 2.), und theile die Summe den vorgeſchriebenen Ver»hältniſſen gemäß (§. 140.), ſo ergiebt ſich aus der Getheiltheit »der Summenlinie die verhältnißgemäße Theilung des N-ecks, und »zwar in der Art, daß jedes Zerlegungs-Dreieck von o aus in

»ſolche Stücke nach §. 144. 1. getheilt werden muß, wie ſie der »Getheiltheit ſeiner ihm zugehörigen Grundlinie entſprechen.«

In Figur 75. iſt das Achteck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\vartheta o$, dieſer Anweiſung gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$, $o\sigma_4$, $o\sigma_5$, in ſechs Theile zerlegt worden, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p''' : p^{IV} : p^{V} : p^{VI}$.

Denn man hat, durch Ziehung der Geraden $o\beta$, $o\gamma$, $o\delta$, $o\varepsilon$, $o\eta$, die Dreiecke $o\alpha\beta$, $o\beta\gamma$, $o\gamma\delta$ etc. gebildet, und dieſelben ſo umgeformt, daß ſie gleiche Höhen erhielten, ſodann die erzeugten Grundlinien $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\eta'$, $\eta'\vartheta'$ zur Summe $\alpha'\vartheta'$ verbunden, letztere vermittelſt der Punkte τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 nach Vorſchrift getheilt (§. 140.), und jedes der genannten Dreiecke von o aus nach §. 144. 1. dergeſtalt zerlegt, wie es die Getheiltheit der zugehörigen Grundlinien erfordert.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 145. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 145. 1. vermittelſt des §. 142.

β) In einer Seite des N-ecks.

§. 146. Aufg. (Fig. 76. 77). Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p'''$ etc.

Aufl. 1. Nach §. 144. 1., vermittelſt des §. 22. 1. d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 1.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 1. Der Seitenpunkt o kann als vierte Winkelſpitze, alſo das Dreieck ſelbſt als Viereck betrachtet werden, in welchem der Winkel bei o gleich zwei Rechten iſt.

In Figur 76. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, jener Anweiſung gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\tau_1$, $o\tau_2$, $o\sigma_3$, $o\sigma_4$, in fünf gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat daſſelbe durch Ziehung der $\gamma\vartheta \parallel o\beta$ in das Dreieck $o\alpha\vartheta$ verwandelt (§. 22. 1.), letzteres von o aus in fünf gleiche Theile getheilt (§. 144. 1.), und die Fußpunkte τ_3, τ_4 der dritten

und vierten Theilungslinie vermittelſt der Geraden $\tau_3\sigma_3$, $\tau_4\sigma_4$ parallel der $o\beta$, auf die Seite $\beta\gamma$ übergetragen (§. 22. 1).

Aufl. 2. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 3., d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 2.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 2.

In Figur 77. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$, $o\sigma_4$ in fünf gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat $o\beta$ gezogen, wodurch die Zerlegungs-Dreiecke $o\beta\alpha$, $o\beta\gamma$ entſtanden ſind; ſodann die $\alpha\gamma$, als Summe der Grundlinien αo, γo, in fünf gleiche Theile getheilt, und jedes der beiden Zerlegungs-Dreiecke von o aus dergeſtalt geſtückelt, wie es die Getheiltheit der ihm zugehörigen Grundlinie in $\alpha\gamma$ fordert, indem $\alpha\beta$ vermittelſt der Geraden $\tau_1\sigma_1$, $\tau_2\sigma_2$ parallel der $o\beta$, und $\gamma\beta$ mittelſt der Geraden $\tau_3\sigma_3$, $\tau_4\sigma_4$ parallel der $o\beta$ in die verhältnißgemäßen Abſchnitte getheilt, und die gefundenen Theilungspunkte mit o durch Gerade verbunden wurden.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 ; p'''^2$ etc.

Aufl. Nach §. 146. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 146. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 147. Aufg. (Fig. 78. 79). Jedes Vier-, Fünf-, überhaupt N-eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$ etc.

Aufl. 1. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 50. und §. 22. 1., d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 1.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 1. Der Seitenpunkt o kann als $(n+1)$te Winkelſpitze, folglich das N-eck ſelbſt unter dieſer Rückſicht als $(N+1)$-eck betrachtet werden.

In Figur 78. iſt das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\tau_2$, $o\tau_3$, $o\sigma_4$, in fünf Stücke zerlegt worden, entſchrechend den Verhältnißgrößen p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}. Denn man hat daſſelbe, durch Ziehung der $\delta\eta \pm o\alpha$, der $\gamma\vartheta \pm o\beta$, in das Dreieck $o\eta\vartheta$ verwandelt (§. 50.); letzteres von o aus in die

verhältnißgemäßen Theile zerlegt (§. 141. 1.), und die außerhalb der Viereckſsgrenze gefallenen Fußpunkte τ_1, τ_4 der erſten und vierten Theilungslinie, vermittelſt der Geraden $\tau_1\sigma_1 \pm o\alpha$, $\tau_4\sigma_4 \pm o\beta$, auf die nächſtgelegenen Viereckſsſeiten $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ übergetragen (§. 22. 1).

Aufl. 2. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 3., d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 2.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 2.

In Figur 79. iſt das Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$, $o\sigma_4$, in fünf Theile zerlegt worden, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p''' : p^{IV} : p^{V}$.

Denn man hat die Geraden $o\beta$, $o\gamma$, $o\delta$, $o\varepsilon$ gezogen, und die dadurch entſtandenen Dreiecke nach §. 22. 3. umgeformt; ſodann die erzeugten Grundlinien $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\eta'$ zur Summe $\alpha'\eta'$ verbunden, letztere nach Vorſchrift getheilt (§. 140.), und jedes der Dreiecke von o aus dergeſtalt nach §. 144. 1. zerlegt, wie es der Getheiltheit der ihm zugehörigen Grundlinie angemeſſen iſt.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 147. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 147. 1. vermittelſt des §. 142.

γ) Innerhalb der N-ecksfläche

§. 148. Aufg. (Fig. 80. 81). Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. 1. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 1., d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 1.

Daher die Angabe der Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 1.

In Figur 80. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\tau_2$, $o\tau_3$, $o\sigma_4$, in fünf Theile zerlegt worden, entſprechend den Verhältnißgrößen p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}.

Denn man hat daſſelbe, durch Ziehung der $\gamma\eta \equiv o\alpha$, der $\gamma\vartheta \equiv o$ in das Dreieck $o\eta\vartheta$ verwandelt (§. 22.), letzteres in die verhältnißgemäß Stücke von o aus getheilt (§. 144. 1.), und die Fußpunkte τ_3, τ_4 der erſt und vierten Theilungslinie, vermittelſt der Geraden $\tau_3\sigma_3 \equiv o\alpha$, $\tau_4\sigma_4 \equiv \beta$ auf die nächſtgelegenen Seiten $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ übergetragen (§. 22. 1).

Aufl. 2. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 3., d. h. na §. 145. 1. Aufl. 2.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie §. 145. 1. Aufl. 2.

In Figur 81. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſer Vorſchrift gemäß, v o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\sigma_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$, $o\sigma_4$, $o\sigma_5$, ſechs gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat o mit α, β, γ durch Gerade verbunden, und d daraus hervorgegangenen Dreiecke $o\alpha\beta$, $o\beta\gamma$, $o\gamma\alpha$ nach §. 22. verwandelt; ſodann die erzeugten Grundlinien $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha''$ z Summe $\alpha'\alpha''$ verbunden, letztere in ſechs gleiche Theile gethei (§. 140.), und jedes der genannten Dreiecke in ſolche Stücke, wie d der Getheiltheit der zugehörigen Grundlinie angemeſſen ſind (§. 144. 1

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadra $p'^2 : p''^2 : p'''^2$ etc.

Aufl. Nach §. 148. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwu zeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 148. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Vorſtehendes Conſtructionsverfahren erleidet keine weſentliche Abänderun wenn auch für eine der Theilungslinien eine beſtimmte Lage vorgeſchrieb wäre. Denn hinſichtlich der erſten Löſungsart kann die dem Punkt gegenüberſtehende Seite des Verwandlungs-Dreiecks auf jede beliebi Seite des urſprünglichen Dreiecks verlegt, und jeden Falls ſo verſchob werden, daß ein Theilungspunkt derſelben in den Begrenzungspunkt d feſtgeſetzten Theilungslinie fällt. Nach der zweiten Löſungsart würde m die vorgeſchriebene Theilungslinie ziehen, und dieſelbe als Anfangsſei eines Zerlegungs-Dreiecks betrachten ꝛc.

§. 149. Aufg. Jedes Vier-, Fünf-, überhaupt N-eck, vorſtehender B dingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p''' :$ et

Aufl. 1. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 50. und §. 22. 1., d. h. na §. 145. 1. Aufl. 1.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 1.

Aufl. 2. Nach §. 144. 1. vermittelſt des §. 22. 3. d. h. nach §. 145. 1. Aufl. 2.

Daher die Angabe der allgemeinen Conſtruction wörtlich wie in §. 145. 1. Aufl. 2.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 149. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 149. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Beliebige Ausführungen dieſer Conſtructionsweiſe an Vier- und Vielecken bleiben dem Leſer überlaſſen.

δ) Außerhalb der N-ecksfläche.

150. Aufg. (Fig. 82. 83. 84). Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p'''$: etc.

1ter Fall. Der Punkt o liegt in der Verlängerung einer Dreiecksſeite.

Aufl. (Fig. 82). Es ſey o in der Verlängerung einer beliebigen Seite, etwa der $\beta\gamma$, angenommen, und $\alpha\nu\mu$ eine mte, d. h. eine allgemeine Theilungslinie, welche im gegebenen Dreieck J_n, durch Schneidung der übrigen beiden Seiten, ein Dreieck $\alpha\mu\nu = J_m$ als Summentheil abgrenzt, deſſen Beſtimmung von der Beſtimmung des Punktes μ oder ν abhängig iſt.

Ziehe zu dieſem Endzwecke aus o auf die Verlängerung der Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ die Gerade $o\phi$, parallel der Zwiſchenpunktsſeite $\alpha\gamma$, auf die Verlängerung der Zwiſchenpunktsſeite $\alpha\gamma$ die Gerade $o\psi$, parallel der Fußpunktsſeite $\alpha\beta$; ſetze

$$\alpha\beta = a, \quad \alpha\phi = o\psi = g, \quad \alpha\mu = a_m,$$
$$\alpha\gamma = c, \quad \alpha\psi = o\phi = h, \quad \alpha\nu = c_m,$$

und berückſichtige den Satz: »Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten ſich wie die Produkte der denſelben einſchließenden Seiten,« ſo ergeben ſich leicht folgende Beſtimmungsproportionen für die Seitenabſchnitte $\alpha\mu, \alpha\nu$:

$$J_m : J_n = a_m c_m : ac = p_m : p_n,$$
$$a_m : c_m = (g + a_m) : h,$$

aus welchen man nach gehöriger Entwickelung findet:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}p_n ac}{p_n h} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}p_n ac}{p_n h}\right)^2 + \frac{p_n ac}{p_n h} \cdot g} \quad (1).$$

$$c_n = -\frac{\frac{1}{2}p_n ac}{p_n g} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}p_n ac}{p_n g}\right)^2 + \frac{p_n ac}{p_n g} \cdot h} \quad (2).,$$

zwei Formeln, deren jede ein allgemeines Conſtructionsgeſetz zur Löſung der Aufgabe darbietet (§. 15. 24.), und zwar in ſo mannigfacher Modificirbarkeit, als ſie verſchiedener conſtructionsfähiger Umbildungen empfänglich iſt.

Conſtructionelle Beſtimmung der allgemeinen Theilungslinie $\sigma\nu\mu$, entſprechend dem Theilungsverhältniß $\frac{p_m}{p_n}$, vermittelſt der Fußpunktsformel (1).:

a) (Fig. 82). Beſtimme nach §. 140. auf der Fußpunktsſeite $\alpha\beta = a$ den Seitenabſchnitt $\alpha\tau = \frac{p_m a}{p_n}$, verbinde den Punkt τ mit dem Endpunkte ψ der Fußpunktsparallelen $\sigma\psi$ durch die Gerade $\psi\tau$, und ziehe aus dem Endpunkte γ der Zwiſchenpunktsſeite $\alpha\gamma$ auf die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ eine Gerade parallel der genannten Verbindungslinie, d. h. $\gamma\sigma \mp \psi\tau$. Beſchreibe über $\phi\sigma$ einen Halbkreis, errichte in α das bis an die Peripherie reichende Perpendikel αu; halbire $\alpha\sigma$ in ω, ziehe die Gerade ωu, und ſchlage aus ω mit ωu einen Bogen, welcher die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ in μ, dem Begrenzungspunkte der geſuchten Theilungslinie $\sigma\nu\mu$, ſchneiden wird, oder:

b) (Fig. 82). Beſtimme nach §. 140. auf der Zwiſchenpunktsſeite $\alpha\gamma = c$ den Seitenabſchnitt $\alpha\tau' = \frac{p_m c}{p_n}$, verbinde den Endpunkt β der Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ mit dem Endpunkte ψ der Fußpunktsparallelen $\sigma\psi$ durch eine Gerade $\beta\psi$, und ziehe aus dem Theilungspunkte τ' auf die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ eine Gerade $\tau'\sigma$ parallel der Verbindungslinie $\beta\psi$. Beſchreibe über $\phi\sigma$ einen Halbkreis, errichte in α das bis an die Peripherie reichende Perpendikel αu, halbire $\alpha\sigma$ in ω, ziehe die Gerade ωu, und ſchlage aus ω mit ωu einen Bogen, welcher die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ in μ, dem Begrenzungspunkte der geſuchten Theilungslinie $\sigma\nu\mu$, ſchneiden wird.

Denn man hat beiden Conſtructions-Methoden zufolge:

$$\alpha\sigma = \frac{\alpha\tau \cdot \alpha\gamma}{\alpha\psi} = \frac{\alpha\tau' \cdot \alpha\beta}{\alpha\psi} = \frac{p_m ac}{p_n h} \text{ (§. 15. 1.), und}$$

$$\alpha\omega = \tfrac{1}{2}\alpha\sigma = \frac{\frac{1}{2}p_m ac}{p_n h}.$$

Ferner nach §. 15. 9.:

$$\alpha u^2 = \alpha\sigma \cdot \alpha\Phi = \frac{p_n ac}{p_n h} \cdot g,$$

und nach §. 15. 11.:

$$\omega\mu = \omega u = \sqrt{\alpha\omega^2 + \alpha u^2} = \sqrt{\left(\frac{\pm p_n ac}{p_n h}\right)^2 + \frac{p_n ac}{p_n h} \cdot g},$$

folglich durch Summirung:

$\alpha\mu = \alpha\omega + \omega\mu = a_n$ der Formel (1).,

und demnach das Dreieck:

$\alpha\mu\nu = J_n$ w. z. b. w.

NB. Eine ähnliche Doppelconſtruction ergiebt ſich aus dem Anblicke der Formel (2). — Die Anwendung beider Doppelmethoden auf beliebige Vieltheilungen derſelben Art unterliegt keiner Schwierigkeit, wenn man erwägt, daß durch a die jedesmalige Fußpunktsſeite, durch c die jedesmalige Zwiſchenpunktsſeite, und durch $\frac{p_m}{p^n}$ jedes beliebige Summenverhältniß der n Theilung repräſentirt wird.

Verſchiedene Abänderungen der allgemeinen Conſtructionsweiſen, mittelſt paßlicher Umgeſtaltungen beider Formeln, bleiben der Anordnung des Lehrers überlaſſen.

2ter Fall. Der Punkt o liegt nicht in der Verlängerung einer Dreiecks-Seite.

Aufl. (Fig. 83. 84). Nach Fall 1. mittelſt Anwendung des Satzes:
»Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien.«
»Zerlege nämlich das Hauptdreieck, durch Ziehung einer Geraden
»von o aus, in zwei Nebendreiecke, welche gleiche Höhen erhalten.
»Theile die dadurch geſchnittene Seite des Hauptdreiecks, als Summe
»der Grundlinien beider Nebendreiecke, in die verhältnißgemäßen
»Stücke (§. 140.), und conſtruire für jedes Nebendreieck nach Fall 1.
»ſolche Theilungslinien, wie ſie der Getheiltheit der zugehörigen
»Grundlinie entſprechen.«

In Figur 83. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\mu'$, $o\mu''$, in drei gleiche Theile zerlegt worden, und zwar nach der Conſtructions-Methode a des Falles 1., weil die Grundlinien der beiden Nebendreiecke Fußpunktsſeiten geworden ſind.

Denn man hat aus o die Gerade $o\gamma o'$ gezogen, und für jedes der dadurch entſtandenen Nebendreiecke $\gamma o'\alpha$, $\gamma o'\beta$ nach Vorſchrift des Falles 1. die erforderlichen Hülfslinien $\downarrow o\psi' \doteq \alpha o'\beta$, $\downarrow o\Phi \doteq \alpha\gamma$,

$o\Phi' \neq \beta\gamma$; ſodann die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$, als Summe der Grundlinien $\alpha o'$, $\beta o'$, in drei gleiche Theile getheilt (§. 140.), und für jedes Nebendreieck diejenige Theilungslinie nach Fall 1. a conſtruirt, welche der Getheiltheiltheit der zugehörigen Grundlinie entſpricht, d. h. im Dreieck $\gamma\alpha o'$ für den Abſchnitt $\alpha\tau_1$, die Theilungslinie $o\mu'$, und im Dreieck $\gamma\beta o'$ für den Abſchnitt $\beta\tau_2$ die Theilungslinie $o\mu''$, wodurch offenbar der Aufgabe Genüge geſchehn.

In Figur 84. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, derſelben Anweiſung gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\mu'$, $o\mu''$, in drei gleiche Theile zerlegt worden, und zwar nach der Conſtructionsmethode b des Falls 1., weil die beiden Grundlinien der Nebendreiecke Zwiſchenpunktsſeiten bilden.

Denn man hat durch Ziehung der Geraden $oo'\beta$ die Nebendreiecke $\beta o'\alpha$, $\beta o'\gamma$ erzeugt, und für jedes derſelben nach Vorſchrift des Falls 1. von o aus die nöthigen Hülfslinien gezogen, $o\psi \neq \alpha\beta$, $o\psi' \neq \gamma\beta$, $\Phi o\Phi' \neq \alpha o'\gamma$; ſodann die Zwiſchenpunktsſeite $\alpha\gamma$, als Summe der Grundlinien $\alpha o'$, $\gamma o'$, in drei gleiche Theile zerlegt (§. 140.), und für jedes Nebendreieck nach Fall 1. b diejenige Theilungslinie conſtruirt, welche der Getheiltheit der zugehörigen Grundlinie entſpricht, nämlich für das Dreieck $\beta o'\alpha$ die Theilungslinie $o\mu'$ entſprechend dem Seitenabſchnitte $\alpha\tau_1$, für das Dreieck $\beta o'\gamma$ die Theilungslinie $o\mu''$, entſprechend dem Seitenabſchnitte $\gamma\tau_2$, wodurch offenbar der Aufgabe genügt iſt.

NB. Die Anwendung dieſer Conſtructionsmethoden auf beliebige Vieltheilungen derſelben Art bedarf keiner weitern Erläuterung.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 150. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 150. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 151. Aufg. (Fig. 85. 86. 87). Jedes Viereck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p'''$: etc.

1ter Fall. Der Punkt o liegt im Durchſchnittspunkt zweier verlängerten Gegenſeiten.

a) Eines Trapezes.

Aufl. (Fig. 85). Sämmtliche Theile werden Trapeze, und zwar von der Art, daß ſie zur Höhe die Höhe des Haupttrapezes erhalten. Daher die Anwendung des Satzes: »Trapeze von gleichen Höhen verhalten ſich wie die Verbindungslinien der Mittelpunkte ihrer nicht parallelen Seiten.« Wird demnach die Verbindungslinie des Haupttrapezes durch s, das dem allgemeinen Theil J_m entſprechende Stück derſelben durch s_m bezeichnet, ſo ergiebt ſich offenbar folgende allgemeine Beſtimmungsformel für J_m:

$$s_m = \frac{p_m s}{p_n} \quad (1),$$

aus welcher erhellt, daß ſämmtliche Theile gefunden werden, wenn man s in die verhältnißgemäßen Abſchnitte zerlegt (§. 140.), und durch jeden Zerlegungspunkt von o aus eine Gerade bis an die begrenzende Fußpunktsſeite des Haupttrapezes zieht.

In Figur 85. iſt das Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Vorſchrift gemäß, von o aus, vermittelſt der Theilungslinien $o\mu'$, $o\mu''$, in drei gleiche Theile zerlegt worden, wie dies ohne weitere Erörterung in die Augen ſpringt.

b) Eines Trapezoids.

Aufl. (Fig. 86). Es liege o im Durchſchnittspunkt der verlängerten Gegenſeiten $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, und $o\nu\mu$ ſey eine mte, d. h. eine allgemeine Theilungslinie, welche im gegebenen Trapezoid J_n, durch Schneidung der beiden übrigen Seiten $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ein Viereck $\alpha\mu\nu\delta = J_m$ als Summentheil abgrenzt, deſſen Beſtimmung von der Beſtimmung des Punktes μ oder ν abhängig iſt.

Verwandle zu dieſem Endzweck das Trapezoid, mit Beibehaltung der Seite $\alpha\delta$ und des Winkels α, nach §. 37. in ein Dreieck $\delta\alpha A$, verlängere ferner die Fuß- und Zwiſchenpunktsſeiten $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ bis zur gegenſeitigen Schneidung in x, ziehe endlich aus dem Zwiſchenpunkt ν auf die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ eine Gerade νx parallel der $\alpha\delta$, und ſetze:

$\alpha\beta = a$, $\alpha A = A$, $\alpha x = k$,

$\alpha\delta = d$, $\delta o = l'$, $\alpha o = l$,

$\alpha x = x$, $\nu x = y$, $\alpha\mu = a_m$,

ſo ergeben ſich, nach bekannten Sätzen der Geometrie, leicht folgende Beſtimmungsproportionen für den Abſchnitt $\alpha\mu$:

$J_m : J_n = ((d + y)x + y(a_m - x)) : dA = p_m : p_n$,

$d : y = k : (k - x)$,

$l : y = a_m : (a_m - x)$,

aus welchen man nach Wegſchaffung des x und y findet:

$$a_m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_m A d}{p_n l} + \frac{k(l+l')}{l}\right) - \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{p_m A d}{p_n l} + \frac{k(l+l')}{l}\right)^2 - \frac{p_m A}{p_n} . k} \quad (2).,$$

oder, wenn die eingeklammerte Vorgröße durch R bezeichnet wird:

$$a_m = \tfrac{1}{2}R - \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 - \frac{p_m A}{p_n} . k} \quad (2).,$$

eine Formel, welche ein allgemeines Conſtructionsgeſetz zur Löſung der Aufgabe ſymboliſch vor Augen ſtellt (§. 15. 25.), und zwar in ſo mannigfacher Modificirbarkeit, als ſie verſchiedener conſtructionsfähiger Umbildungen empfänglich iſt.

Conſtructionelle Beſtimmung der allgemeinen Theilungslinie $o\nu\mu$, entſprechend dem Theilungsverhältniß $\frac{p_m}{p_n}$, vermittelſt der Fußpunktsformel (2).:

(Fig. 86). Beſtimme nach §. 140. auf der Dreiecksgrundlinie $\alpha A = A$ den Abſchnitt $\alpha\tau = \frac{p_m A}{p_n}$; ziehe $o\tau$, und aus δ auf die Fußpunktsſeite $\alpha\beta$ die Gerade $\delta\sigma$ parallel der $o\tau$, ſo ergiebt ſich nach §. 15. 1.:

$\alpha\sigma = \frac{\alpha\tau . \alpha\delta}{\alpha o} = \frac{p_m A d}{p_n l}$ als erſtes Glied des R.

Verlängere αo über o hinaus bis o', ſo daß $oo' = o\delta = l'$, folglich $\alpha o' = \alpha o + oo' = l + l'$ wird. Ziehe ox, und aus o' auf αx die Gerade $o'x'$ parallel der ox, ſo entſteht nach §. 15. 1.:

$\alpha x' = \frac{\alpha x . \alpha o'}{\alpha o} = \frac{k(l+l')}{l}$ als zweites Glied des R,

alſo wenn $\alpha x'$ bis ϱ verlängert wird, ſo daß $x'\varrho = \alpha\sigma$ wird:

$\alpha\varrho = \alpha x' + x'\varrho = \alpha x' + \alpha\sigma = R.$

Beſchreibe ferner über $\alpha x = k$ einen Halbkreis, errichte in τ das bis an die Peripherie reichende Perpendikel $\tau\zeta$, nnd ziehe die Sehne $\alpha\zeta$, ſo ergiebt ſich nach §. 15. 9.:

$\alpha\zeta^2 = \alpha\tau . \alpha x = \frac{p_m A}{p_n} . k$ als Hinterglied der Wurzelgröße.

Halbire endlich $\alpha\varrho$ durch den Punkt ω, beſchreibe über $\alpha\omega = \frac{1}{2}R$ einen Halbkreis, trage in denſelben von α aus die Sehne $\alpha\xi = \alpha\zeta$, ziehe $\omega\xi$, und ſchlage aus ω mit $\omega\xi$ einen Bogen, welcher die $\omega\alpha$ in μ, dem Fußpunkt der geſuchten Theilungslinie $o\nu\mu$, ſchneiden wird. Denn man hat nach §. 15. 15.:

$$\omega\mu = \omega\xi = \sqrt{\alpha\omega^2 - \alpha\xi^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 - \frac{p_m A}{p_n} . k},$$

folglich durch Abzug:

$$\alpha\mu = \alpha\omega - \omega\mu = \tfrac{1}{2}R - \sqrt{\tfrac{1}{4}R^2 - \frac{P_m A}{P_n}k} = a_m \text{ der Formel (2).}$$

und demnach das Viereck:

$\alpha\mu\nu\delta = J_m$ w. z. b. w.

NB. Die Anwendung dieſer Conſtructions-Methode auf beliebige Vieltheilungen derſelben Art hat keine Schwierigkeit, wenn man berückſichtigt, daß durch a die jedesmalige Fußpunktsſeite, durch A die jedesmalige Grundlinie des Verwandlungs-Dreiecks auf der Fußpunktsſeite, durch d die jedesmalige Verbindungslinie der Fuß- und Zwiſchenpunktsſeiten, wo ſie den größten Abſtand von einander bilden, durch l′ die Verlängerung des d bis o, und durch l die Summe von $d + l'$ ſo wie endlich durch $\frac{P_m}{P_n}$ jedes beliebige Summenverhältniß der n Theilung dargeſtellt wird.

Verſchiedene Abänderungen der vorſtehenden Conſtructionsart, nach verſchiedenen Umſtellungen der Formel (2), bleiben dem Ermeſſen des Lehrers überlaſſen.

2ter Fall. Der Punkt o liegt nicht im Durchſchnittspunkt zweier verlängerten Gegenſeiten.

Aufl. Nach §. 150. Fall 1. und §. 151. Fall 1. mittelſt Anwendung des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie »ihre Grundlinien.«

»Zerlege nämlich das gegebene Viereck, durch Ziehung gerader »Linien von o aus, in die möglich kleinſte Anzahl von Dreiecks- und »Vierecks-Formen; verwandle dieſe Zerlegungsfiguren in Dreiecke »von gleichen Höhen (§. 37. §. 22. 3.), wodurch die Inhaltsver»hältniſſe derſelben auf die Längenverhältniſſe der erzeugten Grund»linien zurückgeführt ſind. Summire demnach dieſe Grundlinien, »theile die Summe den vorgeſchriebenen Verhältniſſen gemäß »(§. 140.), und beſtimme in jeder Zerlegungsfigur diejenigen Thei»lungslinien, welche der Getheiltheit der zugehörigen Grundlinie »entſprechen, und zwar nach §. 150. Fall 1. oder nach §. 151. »Fall 1, jenachdem die zu theilende Zerlegungsfigur ein Dreieck »oder ein Viereck iſt«.

In Figur 87. würde man das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Anweiſung gemäß, von o aus, durch Ziehung der Geraden $o\alpha$, $o\beta$, in folgende drei Nebenfiguren zerlegen $\delta\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'\beta'\beta$, $\beta\beta'\gamma$, ſodann dieſelben in Dreiecke von gleichen Höhen verwandeln, die gefundenen Grundlinien ſummiren, die Summe in n Theile zerlegen, und in jeder

Zerlegungsfigur diejenigen Theilungslinien nach Fall 1. §. 150. §. 151. conſtruiren, welche der Getheiltheit der zugehörigen Grundlinie angemeſſen wären.

Die Ausführung ſolcher Conſtructionen an beliebigen Vierecken kann füglich dem Leſer überlaſſen bleiben.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 151. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 151. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 152. Aufg. (Fig. 88.). Jedes Vieleck, vorſtehender Bedingung gemäß zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach Fall 1. des §. 151, mittelſt Anwendung des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien«, alſo analog dem Verfahren in §. 151. Fall 2. »Zerlege nemlich »das gegebene Vieleck, durch Ziehung gerader Linien von o aus, in »die möglich kleinſte Anzahl von Dreiecks- und Vierecks-Formen. »Verwandle dieſe Zerlegungsfiguren, um ihre Inhaltsverhältniſſe »linear darzuſtellen, in Dreiecke von gleichen Höhen (§. 37. §. 22, »3.); ſummire die erzeugten Grundlinien, theile die Summe derſel»ben den vorgeſchriebenen Verhältniſſen gemäß (§. 140.); und be»ſtimme in jeder Zerlegungsfigur die der Getheiltheit ihrer zugehö»rigen Grundlinie entſprechenden Theilungslinien, und zwar nach »Fall 1. des §. 150. oder nach Fall 1. des §. 151. jenachdem die »zu theilende Zerlegungsfigur als Dreieck oder Viereck erſcheint«.

In Figur 88. würde man das Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$, durch Ziehung der Geraden $o\alpha$, $o\beta$, $o\delta'$, $o\varepsilon'$, in die Nebenfiguren $\eta\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon'\delta\delta'$, $\delta\delta'\beta\beta'$, $\beta\beta'\gamma$ zerlegen, und jede geforderte n Theilung der Hauptfigur, mittelſt Theilung dieſer Nebenfiguren nach vorſtehender Anweiſung, bewerkſtelligen.

Die Ausführung ſolcher Conſtructionen an beliebigen Vielecken wird dem Leſer überlaſſen.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 152. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 152. 1. vermittelst des §. 142.

) Sämmtliche Theilungslinien sollen durch je zwei Seiten des N=ecks begrenzt werden, und stetig auf einander folgen. (Zickzacktheilung.)

) Der Anfangspunkt o der ersten Theilungslinie liegt in einer Winkelspitze des N=ecks.

153. Aufg. Jedes Dreieck, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die sich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Der Endpunkt einer jeden Theilungslinie wird Winkelspitze des Restdreiecks, und zugleich Anfangspunkt der nächsten Theilungslinie, daher die Bestimmung der einzelnen auf einander folgenden Theile durch wiederholte Anwendung des §. 144. 1.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 153. 1. vermittelst des §. 141.

3) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 153. 1. vermittelst des §. 142.

NB. Die Anwendung dieser Vorschriften auf verschiedene Verhältnißtheilungen der Dreiecke bleibt dem Leser überlassen.

§. 154. Aufg. Jedes Vier=, Fünf=, überhaupt N=eck, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Der Endpunkt einer jeden Theilungslinie wird Winkelspitze des Reststücks, und zugleich Anfangspunkt der folgenden Theilungslinie, daher die Bestimmung aller einzelnen Theile, bis zur Erzeugung des ersten Restdreiecks, durch wiederholte Anwendung des §. 145. 1. die etwa fehlenden Stücke im Restdreiecke selbst nach §. 153. 1.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach 154. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 154. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Die Ausführung dieſer Theilungsart an beliebigen N-ecken bleibt der Kürze wegen dem Leſer überlaſſen.

β) Der Anfangspunkt o der erſten Theilungslinie liegt in einer Seite des N-ecks.

§. 155. Aufg. Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Beſtimme den erſten Theil nach §. 146. 1. die folgenden Theile nach §. 154. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 155. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 155. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Die Ausführung verſchiedener Vieltheilungen dieſer Art bleibt ebenfalls dem Leſer überlaſſen.

§. 156. Aufg. Jedes Vier-, Fünf-, überhaupt N-eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Beſtimme den erſten Theil nach §. 147. 1. die folgenden nach §. 154. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 156. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 156. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Verſchiedene Theilungen dieſer Art an beliebigen N-ecken wird der Leſer ſelbſt auszuführen ſuchen.

γ) Der Anfangspunkt o der erſten Theilungslinie liegt außerhalb der N-ecksfläche.

§. 157. Aufg. Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Beſtimme den erſten Theil nach §. 150. 1. die übrigen nach §. 154. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 157. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''} :$ etc.

Aufl. Nach §. 157. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Beliebige Ausführungen dieſer Theilungsart an verſchiedenen Dreiecken bleiben dem Leſer überlaſſen.

§. 158. Aufg. Jedes Vier-, Fünf-, überhaupt N-eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Beſtimme den erſten Theil nach §. 151. 1. oder nach §. 152. 1. die übrigen nach §. 154. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 158. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''} :$ etc.

Aufl. Nach §. 158. 1. vermittelſt des §. 142.

NB. Beliebige Ausführungen dieſer Theilungsart an verſchiedenen Vier-, und Vielecken bleiben auch hier dem Leſer überlaſſen.

---

c) Sämmtliche Theilungslinien ſollen durch je zwei Seiten des N-ecks begrenzt werden, und einer gegebenen Richtungslinie parallel ſein. (Paralleltheilung).

α) Die gegebene Richtungslinie ſei eine Seite des N-ecks.

§. 159. Aufg. (Fig. 89. 90.) Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. (Fig. 89.). Es ſei die Seite $\alpha\beta$ die gegebene Richtungslinie, und $\mu\nu$, parallel der $\alpha\beta$, eine mte d. h. eine allgemeine Theilungslinie, welche im Hauptdreieck J_n, durch Schneidung der beiden übrigen Seiten, ein dem J_n ähnliches Dreieck $\gamma\mu\nu = J_m$ als Summentheil abgrenzt, deſſen Beſtimmung von der Beſtimmung des Punktes μ, oder ν abhängig iſt. Bezeichne zu dieſem Endzweck die Richtungslinie $\alpha\beta$ durch a, die ihr parallele mte Theilungslinie $\mu\nu$ durch a_m, eine der beiden Nebenſeiten, gleichviel welche, etwa $\beta\gamma$ durch b, den obern durch die Theilungslinie $\mu\nu$ auf dieſer Seite abgegrenzten Abſchnitt $\gamma\mu$ durch b_m, und berückſichtige den Satz: »Aehnliche »Dreiecke verhalten ſich wie die Quadrate gleichliegender Seiten«; ſo ergiebt ſich offenbar folgende Beſtimmungsproportion:

$$J_m : J_n = a_m^2 : a^2 = b_m^2 : b^2 = p_m : p_n$$

aus welcher man findet:

$$a_m = \sqrt{\frac{p_m aa}{p_n}}. \quad (1) \text{ und } b_m = \sqrt{\frac{p_m bb}{p_n}}. \quad (2).$$

zwei Formeln, aus denen nach §. 15. 9. erhellt:

»daß jede Seite des allgemeinen Summendreiecks $\gamma\mu\nu = J_m$ die »mittlere Proportionale zwiſchen der ihr gleichliegenden Seite des »Hauptdreiecks und dem verhältnißgemäßen Abſchnitte derſelben ſei«.

In Figur 90. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſem Reſultatsſatze gemäß, mittelſt Anwendung der Formel (2), in drei gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat die Nebenſeite $\beta\gamma$ in drei gleiche Theile durch die Punkte τ_1, τ_2 getheilt (§. 140), ſodann über $\gamma\beta$ einen Halbkreis beſchrieben, in τ_1, τ_2 die bis an die Peripherie reichenden Perpendickel $\tau_1 u'$, $\tau_2 u''$ errichtet, die Sehnen $\gamma u'$, $\gamma u''$ gezogen, und aus γ mit $\gamma u'$, $\gamma u''$ Bogen geſchlagen, wodurch $\gamma\beta$ in μ', μ'', den Begrenzungspunkten der geſuchten Theilungslinien $\mu'\nu'$, $\mu''\nu''$ parallel der $\alpha\beta$, geſchnitten wurde.

Denn es iſt nach §. 15. 9.

$$\gamma\mu' = \gamma u' = \sqrt{\gamma\tau_1 \cdot \gamma\beta} = \sqrt{\tfrac{1}{3}bb} = b_1 \text{ der Formel (2)}$$

$$\gamma\mu'' = \gamma u'' = \sqrt{\gamma\tau_2 \cdot \gamma\beta} = \sqrt{\tfrac{2}{3}bb} = b_2 \text{ der Formel (2)}$$

folglich das Dreieck:

$\gamma\mu'\nu' = \frac{1}{4}\alpha\beta\gamma$, und

$\gamma\mu''\nu'' = \frac{3}{4}\alpha\beta\gamma$.

alſo durch Abzug das Trapez:

$\mu'\nu'\mu''\nu'' = \frac{1}{4}\alpha\beta\gamma$, und

$\mu''\nu''\alpha\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma$. w. z. b. w.

NB. Aehnliche Beſtimmungsformeln der allgemeinen Theilungslinie $\mu\nu$ ergeben ſich, wenn in Figur 89 ſtatt des Dreiecks $\gamma\mu\nu$ das angrenzende Trapez $\alpha\beta\mu\nu$ als Summentheil J_m in Betracht gezogen wird. Die Ableitung dieſer Formeln hat keine Schwierigkeit, und bleibt deshalb dem Leſer überlaſſen.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 159. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 159. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 160. Aufg. (Fig. 91 — 96.) Jedes Viereck vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

a) das zu theilende Viereck iſt ein Parallelogramm.

Aufl. »Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten ſich wie ihre Höhen, und, wenn ſie gleichwinkelig ſind, wie die den Grundlinien anliegenden Nebenſeiten.«

Daher die Anwendung des §. 140. auf eine der Nebenſeiten des Hauptparallelogramms.

In Figur 91. iſt das Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Vorſchrift gemäß, mittelſt Theilung der Nebenſeite $\alpha\delta$, in fünf gleiche Theile zerlegt worden.

b) Das zu theilende Viereck iſt ein Trapez.

1ter Fall. Die Theilungslinien ſollen den parallelen Seiten parallel ſein.

Aufl. 1. (Fig. 92.) Es ſeien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ die gegebenen Richtungsſeiten, und die ihnen parallele $\mu\nu$ eine allgemeine Theilungslinie, welche im Haupttrapez mit der längern Richtungsſeite $\alpha\beta$ ein Nebentra-

pej $\alpha\beta\mu\nu = J_m$ als Summentheil abgrenzt, deſſen Beſtimmung von der Beſtimmung des Punktes μ oder ν abhängig iſt.

Ziehe zu dieſem Endzwecke aus γ, μ, auf die längere Richtungsſeite $\alpha\beta$ zwei Gerade $\gamma\varkappa$, $\mu\lambda$, parallel der $\alpha\delta$, und ſetze:

$$\alpha\beta = a,\ \beta\gamma = b,\ \gamma\delta = c.$$
$$\alpha\varkappa = \gamma\delta = c,\ \beta\varkappa = a - c,\ \beta\mu = b_m.$$
$$\alpha\lambda = \mu\nu = a_m,\ \beta\lambda = a - a_m.$$

ſo ergeben ſich, mittelſt bekannter Sätze der Geometrie, leicht folgende Beſtimmungsproportionen für a_m, b_m:

$$J_m : J_n = (a + a_m)\, b_m : (a + c)\, b = p_m : p_n.$$
$$(a - a_m) : b_m = (a - c) : b$$

aus welchen man findet:

$$a_m = \sqrt{a^2 - \frac{p_m (a - c)(a + c)}{p_n}}. \quad (1)$$

$$b_m = \frac{b}{a - c}. (a - a_m). \quad (2).$$

zwei Formeln, deren Conſtructionsgeſetz auf beliebige Trapeztheilungen der vorbedingten Art anwendbar iſt (§. 15, 9. 15. 1.), vorausgeſetzt, daß in allen Fällen die längere der beiden parallelen Richtungsſeiten durch a, die kürzere durch c bezeichnet, und jede mte Theilungslinie a_m, folglich auch der zugehörige Theil J_m, von a aus gerechnet wird. Unter dieſer Vorausſetzung ergiebt ſich aus obigen Formeln jedes J_m

»wenn man zwiſchen der Summe der parallelen Richtungsſeiten, »und dem $\frac{p_m}{p_n}$ Theil ihrer Differenz nach §. 15, 9. die mittlere »Proportionale conſtruirt, ſodann zur größern Richtungsſeite a als »Hypotenuſe, und der gefundenen mittleren Proportionale als Kathete nach §. 15, 15 die a_m als Ergänzungs-Kathete beſtimmt, »letztere auf a abmißt und dieſe Abmeſſung, mittelſt bekannter Methode, in paralleler Richtung auf die ihr entſprechenden Begrenzungspunkte der nicht parallelen Nebenſeiten überträgt«.

Conſtruction eines allgemeinen Summentheils J_m, vorſtehender Vorſchrift gemäß,

(Figur 93). Mache, weil $\beta\alpha > \gamma\delta$ ist, auf $\beta\alpha = a$ die
$\beta A = \beta\alpha + \gamma\delta = a + c$, die
$\beta\varkappa = \beta\alpha - \gamma\delta = a - c$, und nach §. 140 das Stück

$$\beta\tau = \frac{P_m \cdot \beta\varkappa}{P_n} = \frac{P_m (a - c)}{P_n}$$

Beschreibe über βA einen Halbkreis, errichte in τ das bis an die Peripherie reichende Perpendickel $\tau\zeta$, und ziehe die Sehne $\beta\zeta$, so ist nach §. 15, 9.

$$\beta\zeta^2 = \beta\tau \cdot \beta A = \frac{P_m (a - c)(a + c)}{P_n}$$, also $\beta\zeta$ die oben bezeichnete mittlere Proportionale.

Beschreibe ferner über $\beta\alpha$ einen Halbkreis, trage in denselben die gefundene mittlere Proportionale von β aus als Sehne, $\beta\xi = \beta\zeta$; ziehe die Ergänzungssehne $\alpha\xi$; schlage mit dieser aus α einen Bogen, der die $\alpha\beta$ in λ schneidet; ziehe aus λ auf die Nebenseite $\beta\gamma$ die Gerade $\lambda\mu$ parallel der $\alpha\delta$, und aus μ auf die $\alpha\delta$ die Gerade $\mu\nu$ parallel der $\alpha\beta$, so wird das Trapez $\alpha\beta\mu\nu$ den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Denn es ist:

$$\mu\nu = \alpha\lambda = \alpha\xi = \sqrt{\beta x^2 - \beta\xi^2}$$ (§. 15, 15.) d. h.

$$\mu\nu = \sqrt{a^2 - \frac{P_m (a - c)(a + c)}{P_n}} = a_m$$ der Formel (1) und

$$\beta\mu = \frac{\beta\gamma \cdot \beta\lambda}{\beta\varkappa} = \frac{b (a - a_m)}{a - c} = b_m$$ der Formel (2)

folglich das Trapez
$\alpha\beta\mu\nu = J_m$ w. z. b. w.

NB. Die Anwendung dieser allgemeinen Constructionsmethode auf jede beliebige Vieltheilung derselben Art wird der Kürze wegen dem Leser überlassen.

Aufl. 2. (Fig. 92.) Es sei wie vorher $\alpha\beta$ die größere der beiden Richtungsseiten, und die ihr parallele $\mu\nu$ eine mte Theilungslinie, welche im Haupttrapez J_n das der $\alpha\beta$ anliegende Nebentrapez $\alpha\beta\mu\nu = J_m$ als Summentheil abgrenzt, dessen Bestimmung von der Bestimmung des Punktes μ oder ν abhängig ist.

Verlängere zu diesem Behufe die nicht parallelen Seiten des Haupttrapezes bis zur gemeinschaftlichen Schneidung in ω, und setze:
$\alpha\beta = a$ $\beta\gamma = b$, $\gamma\delta = c$
$\mu\nu = a_m$, $\beta\mu = b_m$, $\beta\omega = B$.

ſo ergeben ſich, nach bekannten Sätzen der Geometrie, leicht folgende Proportionen für a_m, b_m:

$$J_m : J_n = (a + a_m)\, b_m : (a + c)\, b = p_m : p_n.$$

$$a : a_m = B : (B - b_m).$$

aus welchen man findet:

$$a_m = \sqrt{a\left(a - \frac{p_m b\,(a+c)}{p_n B}\right)}. \quad (3)$$

$$b_m = B - \sqrt{B\left(B - \frac{p_m b\,(a+c)}{p_n a}\right)}. \quad (4)$$

zwei Formeln, deren jede ein allgemeines leicht erkennbares Conſtructionsgeſetz für beliebige Trapeztheilungen der vorbedingten Art darbietet (§. 15, 1. 9.), und zwar in ſo vielfacher Modificirbarkeit, als ſie verſchiedener conſtructionsfähiger Umbildungen empfänglich iſt. Werden die Grundbedeutungen des a, c, b, B, p_m, p_n richtig aufgefaßt, ſo ergiebt ſich für beliebige Trapeztheilungen der vorgeſchriebenen Art der lineare Werth:

1) eines jeden a_m vermittelſt der Formel (3).

» wenn man zu B, dem $\frac{p_m}{p_n}$ Theil des b, und der Summe (a + c) » nach §. 15, 1. die vierte Proportionale conſtruirt, dieſe von a ſub» trahirt, und zwiſchen dem ganzen a und dem erhaltenen Sub» tractionsreſte nach §. 15, 9. die mittlere Proportionale beſtimmt «.

2) eines jeden b_m vermittelſt der Formel (4).

» wenn man zu a, dem $\frac{p_m}{p_n}$ Theil des b, und der Summe (a + c) » nach §. 15, 1. die vierte Proportionale ſucht, dieſe von B ſubtra» hirt; ſodann zwiſchen B und dem gefundenen Subtractionsreſte » nach §. 15, 9. die mittlere Proportionale bildet und letztere von » B abzieht «.

Conſtruction eines allgemeinen Summentheils J_m, entſprechend dem Theilungsverhältniß $\frac{p_m}{p_n}$:

1) durch unmittelbare Beſtimmung des a_m nach Formel (3), Vorſchrift 1. (Fig. 94.)

Mache $\beta A = \beta\alpha + \gamma\delta = a + c$, und beſtimme auf $\beta\gamma = b$ den Abſchnitt

$$\beta\tau = \frac{p_m \beta\gamma}{p_n} = \frac{p_m b}{p_n}. \quad (\text{§. 140}).$$

Ziehe ωA, und aus τ auf die $\beta\alpha$ die Gerade $\tau\varrho$ parallel der ωA, ſo wird nach §. 15. 1.

$$\beta\varrho = \frac{\beta\tau \,.\, \beta A}{\beta\omega} = \frac{p_m b\,(a + c)}{p_n B} \text{ und}$$

$$\alpha\varrho = \alpha\beta - \beta\varrho = a - \frac{p_m b\,(a + c)}{p_n B}.$$

Beſchreibe über $\alpha\beta$ einen Halbkreis, errichte in ϱ das bis an die Peripherie reichende Perpendikel $\varrho\zeta$, und ziehe die Sehne $\alpha\zeta$, welche als mittlere Proportionale zwiſchen $\alpha\beta$, und $\alpha\varrho$ den linearen Werth des a_m giebt. Schlage demnach aus α mit $\alpha\zeta$ einen Bogen, der die $\alpha\beta$ in λ ſchneidet; ziehe aus λ an die $\beta\gamma$ die Gerade $\lambda\mu$ parallel der $\alpha\delta$, und aus μ an die $\alpha\delta$ die Gerade $\mu\nu$ parallel der $\alpha\beta$, ſo wird das dadurch erzeugte Trapez $\alpha\beta\mu\nu$ den Bedingungen der Aufgabe entſprechen.

Denn es iſt:

$$\mu\nu = \alpha\lambda = \alpha\zeta = \sqrt{\alpha\beta \,.\, \alpha\varrho}. \text{ (§. 15. 9.) d. h.:}$$

$$\mu\nu = \sqrt{a\left(a - \frac{p_m b\,(a + c)}{p_n B}\right)} = a_m \text{ der Formel (3) und}$$

$$\beta\mu = \frac{\beta\omega \,.\, \beta\lambda}{\beta\alpha} = \frac{B\,(a - a_m)}{a} = b_m \text{ der Formel (4)}$$

folglich das Trapez

$$\alpha\beta\mu\nu = J_m, \text{ w. z. b. w.}$$

2) Durch unmittelbare Beſtimmung des b_m nach Formel (4), Vorſchrift 2. (Fig. 94).

Mache $\beta A = \beta\alpha + \gamma\delta = a + c$, und conſtruire auf $\beta\gamma = b$ nach §. 140 den Abſchnitt:

$$\beta\tau = \frac{p_m \beta\gamma}{p_n} = \frac{p_m b}{p_n}.$$

Verbinde α mit τ durch eine Gerade und ziehe aus A an die $\beta\gamma$ die $A\sigma$ parallel der $\alpha\tau$, ſo entſteht auf $\beta\gamma$ das Stück

$$\beta\sigma = \frac{\beta\tau \,.\, \beta A}{\beta\alpha} = \frac{p_m b\,(a + c)}{p_n a} \text{ (§. 15. 1.) und}$$

$$\omega\sigma = \omega\beta - \beta\sigma = B - \frac{p_m b\,(a + c)}{p_n a}.$$

Beſchreibe über $\omega\beta$ einen Halbkreis, errichte in σ das bis an die Peripherie reichende Perpendikel $\sigma\xi$, und ziehe die Sehne $\omega\xi$, ſo wird dieſe, als mittlere Proportionale zwiſchen $\omega\beta$ und $\omega\sigma$, gleich

ſo ergeben ſich, nach bekannten Sätzen der Geometrie, leicht folgende Proportionen für a_m, b_m:

$$J_m : J_n = (a + a_m) b_m : (a + c) b = p_m : p_n.$$

$$a : a_m = B : (B - b_m).$$

aus welchen man findet:

$$a_m = \sqrt{a\left(a - \frac{p_m b (a+c)}{p_n B}\right)}. \quad (3)$$

$$b_m = B - \sqrt{B\left(B - \frac{p_m b (a+c)}{p_n a}\right)}. \quad (4)$$

zwei Formeln, deren jede ein allgemeines leicht erkennbares Conſtructionsgeſetz für beliebige Trapeztheilungen der vorbedingten Art darbietet (§. 15, 1. 9.), und zwar in ſo vielfacher Modificirbarkeit, als ſie verſchiedener conſtructionsfähiger Umbildungen empfänglich iſt. Werden die Grundbedeutungen des a, c, b, B, p_m, p_n richtig aufgefaßt, ſo ergiebt ſich für beliebige Trapeztheilungen der vorgeſchriebenen Art der lineare Werth:

1) eines jeden a_m vermittelſt der Formel (3).

» wenn man zu B, dem $\frac{p_m}{p_n}$ Theil des b, und der Summe (a + c) » nach §. 15, 1. die vierte Proportionale conſtruirt, dieſe von a ſub» trahirt, und zwiſchen dem ganzen a und dem erhaltenen Sub» tractionsreſte nach §. 15, 9. die mittlere Proportionale beſtimmt «.

2) eines jeden b_m vermittelſt der Formel (4).

» wenn man zu a, dem $\frac{p_m}{p_n}$ Theil des b, und der Summe (a + c) » nach §. 15, 1. die vierte Proportionale ſucht, dieſe von B ſubtra» hirt; ſodann zwiſchen B und dem gefundenen Subtractionsreſt » nach §. 15, 9. die mittlere Proportionale bildet und letztere von » B abzieht «.

Conſtruction eines allgemeinen Summentheils J_m, entſprechend dem Theilungsverhältniß $\frac{p_m}{p_n}$:

1) durch unmittelbare Beſtimmung des a_m nach Formel (3), Vorſchrift 1. (Fig. 94.)

Mache $\beta A = \beta\alpha + \gamma\delta = a + c$, und beſtimme auf $\beta\gamma = b$ den Abſchnitt

$$\beta\tau = \frac{p_m \beta\gamma}{p_n} = \frac{p_m b}{p_n}. \quad (\S. 140).$$

ſtalt zerſtückelt, wie es der Getheiltheit der zugehörigen Halbirungslinie angemeſſen iſt. Zu dieſem Behufe wurde im Dreieck $\alpha\delta\lambda$, durch Ziehung der Geraden $\delta\tau_1\sigma_1$, die Getheiltheit der Halbirungslinie $\eta\varkappa$ verhältnißgemäß auf die Seite $\alpha\lambda$ übergetragen, nehmlich $\alpha\sigma_1 : \sigma_1\lambda = \eta\tau_1 : \tau_1\varkappa$, und zu den Abſchnitten $\alpha\sigma_1$ $\sigma_1\lambda$ nach §. 159. 1. die entſprechende Theilungslinie $\mu'\nu'$, parallel der $\delta\lambda$, $\beta\gamma$, beſtimmt; im Parallelogram $\lambda\beta\gamma\delta$ wurde durch den Theilungspunkt τ_2 die Gerade $\mu''\nu''$ parallel der $\beta\gamma$ geführt, wodurch offenbar den Bedingungen der Aufgabe Genüge geſchehn, wie ſich dies leicht nach §. 159. 1. §. 160. 1. a. mit Rückſicht auf den eben angegebenen Satz beweiſen läßt.

NB. Anwendung dieſer Conſtructionsmethode auf beliebige Vieltheilungen ähnlicher Art.

c) Das zu theilende Viereck iſt ein Trapezoid.

Aufl. Nach §. 159. 1. und §. 160. 1. b. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie die dazu gehörigen »Grundlinien«.

»Zerlege nehmlich das gegebene Trapezoid, durch Ziehung einer »Geraden parallel der Richtungsſeite, in ein Dreieck und in ein »Trapez; verwandle beide Zerlegungsfiguren in Dreiecke von gleichen Höhen (§. 37. §. 22. 3.), wodurch die Inhaltsverhältniſſe »derſelben auf die Längenverhältniſſe der erzeugten Grundlinien zurückgeführt ſind. Summire demnach die gefundenen Grundlinien, »und theile die Summe den vorgeſchriebenen Verhältniſſen gemäß »(§. 140.), ſo ergiebt ſich offenbar aus der Getheiltheit der einzelnen Grundlinien die verhältnißgemäße Theilung der zugehörigen »Zerlegungsfiguren, und zwar des Dreiecks nach §. 159. 1. des »Trapezes nach §. 160. 1. b. Fall 1.«.

In Figur 96. iſt das Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Vorſchrift gemäß, vermittelſt der Theilungslinien $\mu'\nu'$, $\mu''\nu''$, parallel der $\beta\gamma$, in drei gleiche Theile getheilt worden. Denn man hat das gegebene Trapezoid, mittelſt Ziehung der Geraden $\delta\lambda \doteq \beta\gamma$, in das Dreieck $\alpha\delta\lambda$ und in das Trapez $\beta\gamma\delta\lambda$ zerlegt; letzteres ſodann nach §. 37. in das Dreieck $\delta\lambda A$ verwandelt, und dadurch, wegen der gleichen Höhen beider Dreiecke, das Inhaltsverhältniß der Zerlegungsfiguren auf das Längenverhältniß ihrer Grundlinien $\alpha\lambda$, λA zurückgeführt. Ferner hat man αA, die Summe dieſer Grundlinien, nach §. 140.

durch die Punkte τ_1, τ_2 in drei gleiche Theile getheilt; den Theilungspunkt τ_1 der $\alpha\lambda$ als σ_1 auf die Dreiecksſeite $\alpha\lambda$, den Theilungspunkt τ_2 der $\lambda\Delta$ als σ_2 auf die Trapezſeite $\lambda\beta$ verhältnißgemäß übergetragen (§. 140.) und endlich in jeder Zerlegungsfigur diejenige Theilungslinie conſtruirt, welche der Getheiltheit der zugehörigen Seite entſpricht. Nehmlich:

Im Dreieck $\alpha\delta\lambda$ die Theilungslinie $\mu'\nu' \neq \delta\lambda \neq \beta\gamma$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\alpha\sigma_1$, $\sigma_1\lambda$, nach §. 159. 1. — indem über $\alpha\lambda$ ein Halbkreis beſchrieben, in σ_1 das bis an die Peripherie reichende Perpendickel $\sigma_1 u'$ errichtet, die Sehne $\alpha u'$ gezogen, und aus α mit $\alpha u'$ ein Bogen geſchlagen wurde, welcher die $\alpha\lambda$ in μ', dem Begrenzungspunkte der geſuchten Theilungslinie $\mu'\nu'$, ſchneiden mußte.

Im Trapez $\beta\gamma\delta\lambda$ die Theilungslinie $\mu''\nu'' \neq \delta\lambda \neq \beta\gamma$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\lambda\sigma_2$, $\sigma_2\beta$ nach §. 160. 1. b. Aufl. 2. — Denn es wurde $\delta\Delta = \beta\gamma$, folglich $\lambda\Delta = \lambda\delta + \beta\gamma$ gemacht; ſodann δ mit σ_2 durch die Gerade $\delta\sigma_2$ verbunden, und aus Δ auf die $\lambda\beta$ die $\Delta\varrho_2$ parallel der $\delta\sigma_2$ gezogen. Ferner wurde $\delta\gamma$, $\lambda\beta$ bis zur gemeinſchaftlichen Schneidung in ω verlängert; über $\lambda\omega$ ein Halbkreis beſchrieben, in ϱ_2 das bis an die Peripherie reichende Perpendickel $\varrho_2 u''$ errichtet; die Sehne $\omega u''$ gezogen, und aus ω mit $\omega u''$ ein Bogen geſchlagen, welcher die $\beta\lambda$ in μ'', dem Begrenzungspunkte der geſuchten Theilungslinie $\mu''\nu''$, treffen mußte.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 160. 1. a. b. c. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 160. 1. a. b. c. vermittelſt des §. 142.

§. 161. Aufg. (Fig. 97.) Jedes Vieleck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 159. 1. und §. 160. 1. a. b. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie die dazugehörigen »Grundlinien«.

Daher die allgemeine Conſtructionsregel:

»Ziehe durch das Vieleck aus ſämmtlichen Winkelſpitzen, welche »der Richtungsſeite nicht anliegen, gerade Linien, parallel der Rich-

»tungsſeite, und verwandle die dadurch entſtandenen Zerlegungsfigu»ren nach §. 37. §. 22. 3. in Dreiecke von gleichen Höhen, wo»durch offenbar die Inhaltsverhältniſſe jener Zerlegungsfiguren auf »die Längenverhältniſſe der erzeugten Grundlinien zurückgeführt ſind. »Summire demnach die erhaltenen Grundlinien; theile die Summe »nach §. 140. in die verhältnißgemäßen Abſchnitte, und conſtruire »in jeder Zerlegungsfigur, welche entweder ein Dreieck, oder ein »Parallelogramm, oder ein Trapez iſt, nach §. 159. 1. oder nach »160. 1. a. oder nach §. 160. 1. b. diejenigen Theilungslinien, »welche der Getheiltheit der zugehörigen Grundlinie entſprechen, »indem die Abſchnitte einer jeden Grundlinie verhältnißgemäß auf »eine Nebenſeite ihrer Zerlegungsfigur übergetragen werden«. (Vergleiche §. 160. 1. c.)

In Figur 97. würde man das Achteck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\vartheta\varkappa$, falls $\alpha\beta$ die gegebene Richtungslinie wäre, durch Ziehung der Geraden $\varkappa\varkappa'$, $\gamma\gamma'$, $\vartheta\vartheta'$, $\eta\eta'$, $\delta\delta'$, parallel der $\alpha\beta$, in die Partialſtücke A, B, C, D, E, F zerlegen; dieſe dann in Dreiecke von gleichen Höhen verwandeln (§. 37. §. 22. 3.), die gefundenen Grundlinien a, b, c, d, e, f zur Summe S verbinden; ferner die Summe S in n Theile theilen (§. 140), die dadurch entſtandenen Abſchnitte der a auf eine Seite des A, der b auf eine Seite des B, der c auf eine Seite des C, der d auf eine Seite des D, der e auf eine Seite des E, der f auf eine Seite des F nach §. 140. verhältnißgemäß übertragen, und endlich für jede Zerlegungsfigur nach §. 159. 1. oder nach §. 160. 1. a. oder nach §. 160. 1. b., je nachdem ſie ein Dreieck, oder ein Parallelogramm, oder ein Trapez iſt, diejenigen Theilungslinien conſtruiren, welche der Getheiltheit ihrer Seite entſprächen.

NB. Die Ausführung ſolcher Conſtructionen an beliebigen Vielecken bleibt der Kürze wegen dem Leſer überlaſſen.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$ etc.

Aufl. Nach §. 161. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 161. 1. vermittelſt des §. 142.

β) Die gegebene Richtungslinie ſei keine Seite des N.ecks, ſondern eine beliebige Gerade.

§. 162. Aufg. (Fig. 98.). Jedes Dreieck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 159. 1. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen, verhalten ſich wie die dazugehörigen Grundlinien«. Daher die allgemeine Conſtructionsregel:

»Zerlege das Hauptdreieck, durch Ziehung einer Geraden, paral»lel der Richtungslinie, in zwei Nebendreiecke von gleicher Höhe; »theile die dadurch geſchnittene Seite des Hauptdreiecks, als Sum»me der Grundlinien beider Nebendreiecke, nach §. 140. in die ver»hältnißgemäßen Stücke, und conſtruire für jedes Nebendreieck nach »§. 159. 1. diejenigen Theilungslinien, welche der Getheiltheit der »zugehörigen Grundlinie entſprechen«.

In Figur 98. iſt das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dieſer Vorſchrift gemäß, vermittelſt der Theilungslinien $\mu'\nu'$, $\mu''\nu''$, parallel der Richtungslinie $\alpha\phi$, in drei gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat die $\gamma\lambda$ parallel der $\alpha\phi$ gezogen; die $\alpha\beta$, als Summe der Grundlinien beider Nebendreiecke $\alpha\gamma\lambda$, $\beta\gamma\lambda$, nach §. 140. in drei gleiche Theile getheilt, und für jedes Nebendreieck diejenige Theilungslinie beſtimmt, welche der Getheiltheit der dazugehörigen Grundlinie entſpricht. (§. 159. 1.) Nehmlich für das Dreieck $\alpha\gamma\lambda$ die Theilungslinie $\mu'\nu' \neq \gamma\lambda \neq \alpha\phi$ entſprechend den Abſchnitten $\alpha\tau_1$, $\tau_1\lambda$; für das Dreieck $\beta\gamma\lambda$ die Theilungslinie $\mu''\nu'' \neq \gamma\lambda \neq \alpha\phi$ entſprechend den Abſchnitten $\beta\tau_2$, $\tau_2\lambda$, wodurch offenbar den Bedingungen der Aufgabe genügt iſt.

NB. Anwendung der obigen Conſtructionsregel auf verſchiedene n Theilungen dieſer Art an beliebigen Dreiecken.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$ etc.

Aufl. Nach §. 162. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten, wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$ etc.

Aufl. Nach §. 162. 1. vermittelſt des §. 142.

163. Aufg. (Fig. 99). Jedes Viereck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 159. 1. und §. 160. 1. a. oder b, vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie die dazu gehörigen Grundlinien«. Daher die allgemeine Conſtructionsregel:

»Ziehe durch das Viereck, aus zwei Winkelſpitzen deſſelben, zwei Gerade parallel der Richtungslinie, und verwandle die dadurch entſtandenen Zerlegungsfiguren, zwei Dreiecke und ein Trapez oder Parallelogramm, nach §. 37. §. 22. 3. in Dreiecke von gleichen Höhen, wodurch die Inhaltsverhältniſſe derſelben auf die Längenverhältniſſe der erzeugten Grundlinien zurückgeführt ſind. Summire dieſe Grundlinien, theile die Summe den vorgeſchriebenen Verhältniſſen gemäß (§. 140.) trage die gefundenen Abſchnitte einer jeden Grundlinie verhältnißgemäß auf eine Nebenſeite der ihr zugehörigen Zerlegungsfigur über (§. 140.), und conſtruire in jeder Zerlegungsfigur nach §. 159. 1. §. 160. 1. a. b. ſolche Theilungslinien, wie ſie der Getheiltheit ihrer Nebenſeite entſprechen«.

In Figur 99. iſt das Trapezoid $\alpha\beta\gamma\delta$, dieſer Vorſchrift gemäß, vermittelſt der Theilungslinien $\mu'\nu'$, $\mu''\nu''$, $\mu'''\nu'''$ parallel der Geraden $\alpha\Phi$, in vier Theile zerlegt worden, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Denn man hat daſſelbe, durch Ziehung der Geraden $\delta\lambda$, $\beta\varkappa$, parallel der $\alpha\Phi$, in die Dreiecke $\alpha\delta\lambda$, $\beta\gamma\varkappa$, und in das Trapez $\delta\lambda\beta\varkappa$ zerlegt; ſodann das Viereck $\lambda\delta\gamma\beta$ in das Dreieck $\lambda\delta B$, und das Trapez $\lambda\delta\beta\varkappa$ in das Dreieck $\lambda\delta A$ verwandelt (§. 37), wodurch αB als Summe der Grundlinien $\alpha\lambda$, λA, AB der drei in Dreiecke von gleichen Höhen umgeformten Zerlegungsfiguren gefunden wurde. Ferner hat man αB nach §. 140. vermittelſt der Punkte τ_1, τ_2, τ_3 in die verhältnißgemäßen Abſchnitte getheilt, ſodann den Theilungspunkt τ_1 der $\alpha\lambda$ in σ_1 der $\alpha\lambda$, den Theilungspunkt τ_2 der λA in σ_2 der $\lambda\beta$, den Theilungspunkt τ_3 der AB in σ_3 der $\gamma\varkappa$ nach Regeln der Proportionaltheilung übergetragen (§. 140.), und endlich in jeder Zerlegungsfigur diejenige Theilungslinie conſtruirt, wie ſie der Getheiltheit der zugehörigen Nebenſeite entſpricht. Nemlich:

Im Dreieck $\alpha\delta\lambda$ die Theilungslinie $\mu'\nu' \neq \delta\lambda \neq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\alpha\sigma_1$, $\sigma_1\lambda$ nach §. 159. 1.

Im Trapez $\delta\lambda\beta\varkappa$ die Theilungslinie $\mu''\nu'' \neq \delta\lambda \neq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\lambda\sigma_2$, $\sigma_2\beta$ nach §. 160. 1. b. Aufl. 2.

Im Dreieck $\beta\gamma\varkappa$ die Theilungslinie $\mu'''\nu''' \neq \beta\varkappa \neq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\gamma\sigma_3$, $\sigma_3\varkappa$, nach §. 159. 1.

(Vergleiche §. 160. 1. c. Conſtruction.)

NB. Anwendung dieſer Conſtructionsmethode auf beliebige Viereckstheilungen ähnlicher Art.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 163. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 163. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 164. Aufg. (Fig. 100). Jedes Vieleck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach §. 159. 1, und §. 160. 1. a. b. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie die dazu gehörigen »Grundlinien« d. h. nach §. 161. 1.; daher die allgemeine Conſtructionsregel:

»Ziehe durch das Vieleck aus ſämmtlichen Winkelſpitzen Gerade »parallel der Richtungslinie, und verwandle die dadurch entſtande»nen Zerlegungsfiguren nach §. 37. §. 22. 3. in Dreiecke von glei»chen Höhen, wodurch offenbar ihre Inhaltsverhältniſſe auf die Län»genverhältniſſe der erzeugten Grundlinien zurückgeführt ſind. Summire »dieſe Grundlinien, theile die Summe den vorgeſchriebenen Verhältniſſen »gemäß (§. 140.); trage die gefundenen Abſchnitte einer jeden Grundlinie »verhältnißgemäß auf eine Nebenſeite der ihr zugehörigen Zerlegungs»figur über (§. 140), und conſtruire endlich für jede Zerlegungsfigur nach »§. 159. 1. oder nach §. 160. 1. a. oder nach §. 160. 1. b. je nachdem ſie »ein Dreieck, oder ein Parallelogramm, oder ein Trapez iſt, diejenigen »Theilungslinien, welche der Getheiltheit ihrer Nebenſeite entſprechen«.

In Figur 100 würde man das Siebeneck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\vartheta$, falls $\vartheta\phi$ die gegebene Richtungslinie wäre, durch Ziehung der Geraden $\alpha\alpha'$, $\eta\eta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\delta\delta'$, $\beta\beta'$, parallel der $\vartheta\phi$, in die Partialſtücke A, B, C, D, E, F zerlegen, dieſe dann in Dreiecke von gleichen Höhen verwandeln (§. 37. §. 22. 3.); die gefundenen Grundlinien a, b, c, d, e, f ſummiren, die Summe ſodann in n Theile theilen (§. 140.), die dadurch entſtandenen Abſchnitte der a auf eine Seite des A, der b auf eine Seite des B, der c auf eine Seite des C, etc. nach §. 140. verhältnißgemäß übertragen, und endlich nach §. 159. §. 160. 1. a. b. in jeder Zerlegungsfigur diejenigen Theilungslinien conſtruiren, welche der Getheiltheit ihrer Seite angemeſſen wären«.

NB. Die Ausführung ſolcher Conſtructionen an beliebigen Vielecken bleibt der Kürze wegen dem Leſer überlaſſen.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 164. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 164. 1. vermittelſt des §. 142.

---

d) Sämmtliche Theilungslinien ſollen den N=ecksſeiten parallel ſein, und dergeſtalt um einen gegebenen Punkt liegen, daß ſie von den Geraden, welche jenen Punkt mit den Winkelſpitzen des N=ecks verbinden, begrenzt werden.
(Aehnlichkeitstheilung.)

α) Der gegebene Punkt o liegt in einer Winkelſpitze des N=ecks.

§. 165. Aufg. (Fig. 101.) Jedes N=eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach §. 15. 1. und 9. oder nach §. 140. und §. 15. 9. vermittelſt des Satzes: »Aehnliche Figuren verhalten ſich wie die

Im Dreieck $\alpha\delta\lambda$ die Theilungslinie $\mu'\nu' \doteq \delta\lambda \doteq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\alpha\sigma_1$, $\sigma_1\lambda$ nach §. 159. 1.

Im Trapez $\delta\lambda\beta\varkappa$ die Theilungslinie $\mu''\nu'' \doteq \delta\lambda \doteq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\lambda\sigma_2$, $\sigma_2\beta$ nach §. 160. 1. b. Aufl. 2.

Im Dreieck $\beta\gamma\varkappa$ die Theilungslinie $\mu'''\nu''' \doteq \beta\varkappa \doteq \alpha\phi$, entſprechend den Seitenabſchnitten $\gamma\sigma_3$, $\sigma_3\varkappa$, nach §. 159. 1.

(Vergleiche §. 160. 1. c. Conſtruction.)

NB. Anwendung dieſer Conſtructionsmethode auf beliebige Viereckstheilungen ähnlicher Art.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2 :$ etc.

Aufl. Nach §. 163. 1. vermittelſt des §. 141.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 163. 1. vermittelſt des §. 142.

§. 164. Aufg. (Fig. 100). Jedes Vieleck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach §. 159. 1, und §. 160. 1. a. b. vermittelſt des Satzes: »Dreiecke von gleichen Höhen verhalten ſich wie die dazu gehörigen »Grundlinien« d. h. nach §. 161. 1.; daher die allgemeine Conſtructionsregel:

»Ziehe durch das Vieleck aus ſämmtlichen Winkelſpitzen Gerade »parallel der Richtungslinie, und verwandle die dadurch entſtande»nen Zerlegungsfiguren nach §. 37. §. 22. 3. in Dreiecke von glei»chen Höhen, wodurch offenbar ihre Inhaltsverhältniſſe auf die Län»genverhältniſſe der erzeugten Grundlinien zurückgeführt ſind. Summire »dieſe Grundlinien, theile die Summe den vorgeſchriebenen Verhältniſſen »gemäß (§. 140.); trage die gefundenen Abſchnitte einer jeden Grundlinie »verhältnißgemäß auf eine Nebenſeite der ihr zugehörigen Zerlegungs»figur über (§. 140), und conſtruire endlich für jede Zerlegungsfigur nach »§. 159. 1. oder nach §. 160. 1. a. oder nach §. 160. 1. b. je nachdem ſie »ein Dreieck, oder ein Parallelogramm, oder ein Trapez iſt, diejenigen »Theilungslinien, welche der Getheiltheit ihrer Nebenſeite entſprechen«.

$J_m : J_n = a_m^2 : a^2 = p_m^2 : p_n^2$ alſo:

$a_m = \frac{p_m a}{p_n}$. (1) woraus erhellt:

»daß jedes a_m des Summentheils J_m ein $\frac{p_m}{p_n}$ Abſchnitt der gleichlie-
»genden Seite a des J_n ſei«.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 165. 2. vermittelſt des §. 142.

β) Der gegebene Punkt o liegt in einer Seite des N=ecks.

§. 166. Aufg. Jedes N=eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach §. 15. 1. und 9. oder nach §. 140. und §. 15. 9. vermittelſt des Satzes: »Aehnliche Figuren verhalten ſich wie die Qua»drate gleichliegender Seiten«. Daher Formel und Conſtruction wie in §. 165. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 166. 1. vermittelſt des §. 141; oder kürzer nach §. 140. d. h. nach §. 165. 2.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 166. 1. vermittelſt des §. 142; oder nach §. 166. 2. vermittelſt des §. 142. d. h. nach §. 165. 3.

NB. Die Ausführung dieſer Theilungsart an beliebigen N=ecken bleibt dem Leſer überlaſſen.

γ) Der gegebene Punkt o liegt im Innern des N=ecks.

§. 167. Aufg. Jedes N=eck, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p'''$: etc.

Aufl. Nach §. 15. 1. und 9. oder nach §. 140. und §. 15. 9. vermittelſt des Satzes: »Aehnliche Figuren verhalten ſich wie die Qua»drate gleichliegender Seiten«. Daher Formel und Conſtruction wie in §. 165. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadrate $p'^2 : p''^2 : p'''^2$: etc.

Aufl. Nach §. 167. 1. vermittelſt des §. 141, oder kürzer nach §. 140. d. h. nach §. 165. 2.

3) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie die Quadratwurzeln $\sqrt{p'} : \sqrt{p''} : \sqrt{p'''}$: etc.

Aufl. Nach §. 167. 1. vermittelſt des §. 142; oder nach §. 167. 2 vermittelſt des §. 142.

NB. Die Ausführung dieſer Theilungsart an beliebigen N-ecken bleibt auch hier dem Leſer überlaſſen.

Dritte Abtheilung.

heilung geometrischer Figuren.

Zweiter Abschnitt.

reistheilungen mit Rücksicht auf die Con-
struction regulärer N-ecke.

Peripherie-, und Bogen-Theilungen gegebener Kreiſe.

NB. In dieſer Unterabtheilung findet man bezeichnet:

1) Die Grade der zu theilenden Peripherie P durch . . . . . 360°
2) Die Grade des zu theilenden Bogens B durch . . . . . b.
3) Den Halbmeſſer der Peripherie P ſo wie des Bogens B durch . r.
4) Die Sehne des Bogens $\frac{P}{n}$, als Seite des regulären N-ecks im Kreiſe, durch . . . . . s_n.
5) Die Sehne des Bogens $\frac{B}{n}$ durch . . . . . t_n.
6) Die linearen oder numeriſchen Verhältnißgrößen der Theilung durch p', p'', p''', etc.
7) Die Summe aller Verhältnißgrößen durch . . . . . p_n.
8) Die Summe von m auf einander folgenden Verhältnißgrößen, wobei m auch = 1 ſein kann, durch . . . . . p_m.
9) Die Sehne des Bogens $\frac{p_m P}{p_n}$ durch . . . . . u_m.
10) Die Sehne des Bogens $\frac{p_m B}{p_r}$ durch . . . . . v_m.

A. Peripherie-Theilungen mit Rückſicht auf die Conſtruction regulärer N-ecke.

§. 168. Aufg. Jeden Kreisumfang P zu theilen:

1) In 3 gleiche Theile (Fig. 102).

Aufl. 1. durch Beſtimmung des Centriwinkels $\frac{360°}{3} = 120°$ vermittelſt des Transporteurs nach §. 2. 4.

Aufl. 2. Durch Bestimmung der Bogensehne $s_6 = r$, als Seite des regulären Sechsecks im Kreise, woraus dann s_3 die Seite eines regulären Dreiecks, als Sehne zweier Sechseckbogen, unmittelbar gefunden wird.

Aufl. 3. Durch Bestimmung der Bogensehne s_3, als Seite des regulären Dreiecks im Kreise, vermittelst der Formel:

$$s_3 = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$$

aus welcher erhellt, daß s_3 nach §. 15. 15. gefunden wird: »wenn man zum Durchmesser $2r$, als Hypotenuse, und zum Halb»messer r, als Kathete die Ergänzungs»Kathete construirt«.

In Figur 102. ist der Kreisumfang P, dieser Vorschrift gemäß, durch die Punkte α, β, γ in drei gleiche Theile getheilt worden.

Denn es wurde der Durchmesser $\alpha\delta = 2r$ gezogen, von δ aus der Halbmesser r als Sehne $\delta\beta$ $\delta\gamma$ in beide Halbkreise getragen, und der Punkt α mit β und γ, so wie der Punkt β mit γ durch eine Gerade verbunden, wodurch offenbar den Bedingungen der Aufgabe Genüge geschehen weil nach §. 15. 15.

$\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\gamma = \sqrt{4r^2 - r^2} = s_3$ geworden, und »zu »gleichen Sehnen eines Kreises gleiche Bogen gehören«.

2) In 6, 12, überhaupt in $3 \cdot 2^n$ gleiche Theile.

Aufl. Für die Sechstheilung ist die Bogensehne $s_6 = r$, für die Zwölf- etc.-Theilung ergeben sich die Bogen und Sehnen, durch wiederholte Anwendung des §. 8. 3. auf die gefundenen Sechs- Zwölf-, etc.-ecksbogen.

3) In 4 gleiche Theile (Fig. 103).

Aufl. 1. Durch Bestimmung des Centriwinkels $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 4.

Aufl. 2. Durch Bestimmung der Bogensehne s_4, als Seite des regulären Vierecks im Kreise, vermittelst der Formel:

$$s_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2},$$

aus welcher erhellt daß s_4 nach §. 15. 11. gefunden wird: »wenn man zwei einander rechtwinkelig schneidende Durchmesser »zieht, und die Endpunkte derselben durch Gerade verbindet«.

In Figur 103. ist der Kreisumfang P, dieser Vorschrift gemäß, durch die Punkte α, β, γ, δ als Endpunkte der sich rechtwinkelig

schneidenden Durchmesser $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, in vier gleiche Theile getheilt worden.

4) In 8, 16 überhaupt in $4 \cdot 2^n$ gleiche Theile.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 8. 3. auf die unter No. 3. gefundenen Bogen.

5) In 5 und 10 gleiche Theile (Fig. 104.)

Aufl. 1. Durch Bestimmung der Centriwinkel $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, und $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 4.

Aufl. 2. Durch Bestimmung der Bogensehne s_{10}, als Seite des regulären Zehnecks im Kreise, woraus dann s_5 die Seite des regulären Fünfecks, als Sehne des doppelten Zehnecksbogens, leicht gefunden wird.

Es sei $\alpha\eta = s_{10}$ folglich der Winkel $\alpha o\eta = 36^\circ$ und der Winkel $\eta\alpha o = \alpha\eta o = 72^\circ$. Wird nun einer der letztern Winkel, etwa $\eta\alpha o$, durch die Gerade $\alpha\pi$ halbirt, so entsteht das Dreieck $\eta\alpha\pi$ ähnlich dem Dreieck $\eta o\alpha$, und die Seiten $o\pi$, $\alpha\pi$, gleich der Seite $\alpha\eta = s_{10}$; daher die Proportion:

$$r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10}),$$

aus welcher sich ergiebt:

$$s_{10} = -\tfrac{1}{2} r + \sqrt{\tfrac{1}{4} r^2 + r^2} = \tfrac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})$$

eine Formel aus welcher erhellt, daß s_{10} nach §. 15. 11. gefunden wird:

»wenn man zu r, und $\frac{1}{2}$ r, als Katheten, die Hypotenuse con»struirt, nnd von dieser den halben Halbmesser abzieht«.

In Figur 104. ist der Kreisumfang P, dieser Vorschrift gemäß, durch die Punkte α, η, β, ϑ, γ, $\varkappa$, δ, λ, ε, μ in zehn, folglich durch die Punkte α, β, γ, δ, ε in fünf gleiche Theile zerlegt worden.

Denn man hat zu $o\varkappa = r$ und $o\omega = \frac{1}{2}r$, als Katheten, die $\varkappa\omega$ als Hypotenuse construirt, sodann aus ω mit ωo einen Bogen geschlagen, welcher auf $\varkappa\omega$ die $\varkappa\sigma = s_{10}$ abgrenzte, durch deren zehnmalige Antragung als Sehne die obengenannten Theilungspunkte gefunden wurden.

6) In 20, 40, überhaupt in $10 \cdot 2^n$ gleiche Theile.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 8. 3. auf die unter Nro. 5. gefundenen Bogen.

7) In 15 gleiche Theile (Fig. 105.)

Aufl. 1. Durch Bestimmung des Centriwinkels $\frac{360°}{15} = 24°$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 4.

Aufl. 2. Durch Bestimmung der Bogensehne s_{15}, als Seite des regulären Fünfzehnecks im Kreise. Es ist der Centriwinkel des Fünfzehnecks gleich dem Centriwinkel des Sechsecks weniger dem Centriwinkel des Zehnecks, d. h. $24° = 60° - 36°$.

Daher die Lösung der Aufgabe nach Nro. 2. und nach Nro. 5. Aufl. 2.

In Figur 105. ist $\alpha\beta = r = s_6$, $\beta\gamma = \beta\sigma = s_{10}$ folglich $\alpha\gamma = s_{15}$ weil der Bogen $\alpha\gamma = 24°$ geworden.

8) In 30, 60 überhaupt in $15 . 2^v$ gleiche Theile.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 8. 3. auf die unter Nro. 7. gefundenen Bogen.

9) In n gleiche Theile.

Aufl. 1. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung des Centriwinkels $\frac{360°}{n}$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 4.

Aufl. 2. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung der Bogensehne s_n, als Seite des regulären N-ecks im Kreise, vermittelst des Satzes: »Jede Kreissehne ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit dem Sinus des ihr zugehörigen Peripheriewinkels«. Daher für s_n die allgemeine Formel:

$$s_n = 2r \sin. \frac{180°}{n} = 2r \sin. 90° . \frac{2}{n},$$

deren Werth aus trigonometrischen Tafeln sowohl der alten als der neuen Kreiseintheilung bestimmt, und vermittelst des verjüngten Maßstabes nach §. 2. 1. construirt werden kann.

Bestimme dieser Vorschrift gemäß s_n als Seite des regulären Sieben-, Neun-, Dreizehn-ecks, etc.

10) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. 1. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung des Centriwinkels $\frac{P_m \cdot 360}{P_n}$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 5 und 4.

Aufl. 2. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung der Bogensehne u_m vermittelst der trigonometrischen Tafeln und des Transporteurs nach der bekannten Formel:

$u_m = 2r \sin. \frac{p_m\, 180}{p_n} = 2r \sin. \frac{2p_m}{p_n}. 90°$. — Beispiele.

169. Aufg. Zu einer gegebenen Geraden g, als Seite eines regulären N-ecks, den Halbmesser r′ des dazu gehörigen Umkreises zu bestimmen.

Aufl. Beschreibe einen Kreis mit beliebigem Halbmesser r, und construire in demselben, nach §. 168. 1 — 9, genau oder näherungsweise die Sehne s_n als Seite des ihm zugehörigen regulären N-ecks, so ergiebt sich leicht, weil s_n und g so wie r und r′ ähnlich liegende Gerade in ähnlichen Figuren sind, die Proportion:

$s_n : g = r : r'$ folglich

$r' = \frac{gr}{s_n}$ als vierte Proportionale zu s_n, g, und r nach §. 15. 1.

Bestimme den Halbmesser r′ für g als Seite eines regulären Drei-, Vier-, Fünf-, Acht-, Zwölf-, Fünfzehnecks — ferner für g als Seite eines regulären Sieben-, Neun-, Dreizehnecks, etc.

B. Bogen-Theilungen.

§. 170. Aufg. Jeden Kreisbogen B zu theilen:

1) In 2^n gleiche Theile.

Aufl. Durch wiederholte Anwendung des §. 8. 3.

2) In n gleiche Theile.

Aufl. 1. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung des Centriwinkels $\frac{b^\circ}{n}$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 5 und 4.

Aufl. 2. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung der Bogensehne t_n vermittelst der in §. 168. 9. Aufl. 2. begründeten Formel:

$$t_n = 2r \sin. \frac{b^\circ}{2n},$$

deren Werthbestimmung und Construction wie in §. 168. 9. Aufl. 2. ausgeführt wird.

3) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' : \text{etc.}$

Aufl. 1. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung des Centriwinkels $\frac{p_m b^\circ}{p_n}$ vermittelst des Transporteurs nach §. 2. 5. und 4.

Aufl. 2. Durch genaue oder näherungsweise Bestimmung der Bogensehne v_m vermittelst der trigonometrischen Tafeln und des Transporteurs nach der bekannten Formel:

$$v_m = 2r \sin. \frac{p_m b^\circ}{2p_n} \text{ —. Beispiele.}$$

I. Flächen-, und Flächenstück-Theilungen gegebener Kreise.

NB. In dieser Unterabtheilung findet man bezeichnet:

1) Die linearen oder numerischen Verhältnißgrößen der Theilung durch $p, p, p,$ etc.
2) Die Summe aller Verhältnißgrößen durch . . . . . p_n
3) Die Summe von m auf einander folgenden Verhältnißgrößen, wobei m auch $= 1$ sein kann, durch . . . . . p_m
4) Jede zu theilende Fläche durch . . . . . J_n
5) Jeden $\frac{p}{p_n}$te Theil der Fläche J durch . . . . . J_m
6) Den Halbmesser einer zu theilenden Kreisfläche, oder eines zu theilenden Kreisausschnitts durch . . . . . r.

A. Theilung gegebener Kreisflächen.

a) Durch Halbmesser.

171. Aufg. Jede Kreisfläche J_n vorstehender Bedingung gemäß zu theilen:

1) In n gleiche Theile.

Aufl. »Ausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Begrenzungsbogen«. Daher die genaue oder näherungsweise Lösung der Aufgabe §. 168. 1 — 9.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Dem unter 1. angeführten Satze gemäß die genaue oder näherungsweise Lösung der Aufgabe nach §. 168. 10.

b) Durch concentrische Kreise.

172. Aufg. Jede Kreisfläche J_n, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n gleiche Theile. (Fig. 106.)

Aufl. »Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser« Daher für jedes J_m, dessen Halbmesser durch r_m bezeichnet sein mag, die allgemeine Proportion:

$$J_m : J_n = r_m^2 : r^2 = m : n.$$

aus welcher man findet

$$r_m = \sqrt{\frac{mr}{n}} \cdot r,$$

eine Formel, deren Construction nach §. 15. 1. und 9. leicht bewerkstelligt wird:

»wenn man zu n, m, r die vierte Proportionale, und zwischen »dieser und r die mittlere Proportionale, figürlich darstellt«.

In Figur 106. ist der Kreis P, dieser Vorschrift gemäß, durch die Kreise P′, P″ in drei Theile getheilt worden.

Denn man hat den Halbmesser $o\alpha = r$ vermittelst der Punkte τ_1, τ_2 in drei gleiche Theile zerlegt, über αo einen Halbkreis beschrieben, in τ_1, τ_2 die bis an die Peripherie des Halbkreises reichenden Perpendikel $\tau_1\sigma_1$, $\tau_2\sigma_2$ errichtet, und mit den Sehnen $o\sigma_1$, $o\sigma_2$ aus o die Kreise P′, P″ geschlagen, welche der Aufgabe genügen, weil nach §. 15. 9.

$$o\sigma_1 = \sqrt{o\tau_1 \cdot o\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{3}r \cdot r} = r_1 \text{ und}$$

$$o\sigma_2 = \sqrt{o\tau_2 \cdot o\alpha} = \sqrt{\tfrac{2}{3}r \cdot r} = r_2 \text{ ist}$$

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Analog dem Verfahren unter 1. vermittelst der allgemeinen Formel:

$$r_m = \sqrt{\frac{P_m r}{P_n}} \cdot r.$$

NB. Es leuchtet ein, daß man statt der concentrischen Theilungskreise auch excentrische wählen könnte, etwa solche welche den gegebenen Hauptkreis in einem Punkte der Peripherie berührten, wodurch dann zugespitzte Kreisringe entständen.

B. Theilung gegebener Kreisringe.

a) Durch Halbmesser.

§. 173. Aufg. Jeden Kreisring J_n, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n gleiche Theile.

Aufl. Genau oder näherungsweise durch Bogenbestimmung eines der concentrischen Begrenzungskreise nach §. 168. 1 — 9, also analog dem Verfahren in §. 171. 1.

2) In n Theile, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Analog dem Verfahren unter 1. nach §. 168. 10.

b) Durch concentriſche Kreiſe.

174. Aufg. Jeden Kreisring J_n, vorſtehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n gleiche Theile. (Fig. 107.)

Aufl. Wird der Halbmeſſer des äußern Umfanges durch r, der des innern durch r', und der des J_m durch r_m bezeichnet, ſo ergiebt ſich offenbar, nach bekannten Sätzen der Geometrie, folgende allgemeine Grundgleichung zwiſchen r, r', nnd r_m.

$$(r_m^2 - r'^2)\,\pi = \frac{m}{n}(r^2 - r'^2)\,\pi$$

aus welcher man findet:

$$r_m = \sqrt{\frac{m}{n}(r^2 - r'^2) + r'^2}$$

eine Formel, deren Conſtruction nach §. 15. leicht ausgeführt wird.

»wenn man zu r als Hypotenuſe und r' als Kathete die Ergän»zungskathete r'' nach §. 15, 15; ſodann zwiſchen r'' und $\frac{m}{n}r''$ die »mittlere Proportionale k nach §. 15, 9; und endlich zu k und r' »als Katheten die Hypotenuſe r_m nach §. 15, 11. beſtimmt«.

In Figur 107 iſt der durch P und P' begrenzte Kreisring, dieſer Vorſchrift gemäß, durch die Peripherien Q', Q'' in drei gleiche Theile zerlegt worden. Denn man hat den Halbmeſſer $o\alpha' = r'$, und aus dem Endpunkte deſſelben das bis an die Peripherie P reichende Perpendikel:

$\alpha'\alpha = \sqrt{o\alpha^2 - o\alpha'^2} = \sqrt{r^2 - r'^2}$ (§. 15. 15) gezogen, ſodann dieſes Perpendikel nach §. 15. 1. oder §. 140. durch die Punkte τ_1, τ_2 in drei gleiche Theile getheilt; ferner über $\alpha\alpha'$ einen Halbkreis beſchrieben, auf τ_1, τ_2 die bis an des Halbkreiſes Peripherie verlängerten Senkrechten $\tau_1\sigma_1$, $\tau_2\sigma_2$ geſtellt, ſodann die Sehnen $\alpha'\sigma_1$, $\alpha'\sigma_2$, mittelſt Bogenſchlagung aus α', auf $\alpha'\alpha$ abgetragenen, $\alpha'\mu = \alpha'\sigma$, $\alpha'\nu = \alpha'\sigma_2$; endlich den Punkt o mit den Punkten μ, ν durch Gerade verbunden, und aus o mit $o\mu$, $o\nu$, den Halbmeſſern der geſuchten Kreiſe, die Peripherien Q', Q'' conſtruirt.

Denn es ist nach §. 15. 9.

$$\alpha'\mu = \alpha'\sigma_1 = \sqrt{\alpha'\tau_1 \cdot \alpha'\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r^2 - r'^2)} \text{ und}$$

$$\alpha'\nu = \alpha'\sigma_2 = \sqrt{\alpha'\tau_2 \cdot \alpha'\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r^2 - r'^2)}.$$

ferner nach §. 15. 11.

$$o\mu = \sqrt{\alpha'\mu^2 + \alpha'o^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r^2 - r'^2) + r'^2} = r_1$$

$$o\nu = \sqrt{\alpha'\nu^2 + \alpha'o^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r^2 - r'^2) + r'^2} = r_2$$

folglich mittelst Q', Q'' den Bedingungen der Aufgabe Genüge geleistet.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Analog dem Verfahren unter 1. vermittelst der allgemeinen Formel:

$$r_m = \sqrt{\frac{p_m}{p_n}(r^2 - r'^2) + r'^2}.$$

C. Theilung gegebener Kreisausschnitte.

a) Durch Halbmesser.

§. 175. Aufg. Jeden Kreisausschnitt J_n, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) In n gleiche Theile.

Aufl. »Kreisausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Begrenzungsbogen«. Daher die Ausführung der Construction analog jener in §. 171. 1. vermittelst genauer oder näherungsweiser Bogenbestimmung nach §. 170. 1. 2.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Analog dem Verfahren unter 1. vermittelst des §. 170. 3.

b) durch concentrische Bogen.

§. 176. Aufg. Jeden Kreisausschnitt J_n, vorstehender Bedingung gemäß, zu theilen:

1) in n gleiche Theile:

Aufl. Aehnliche Kreisausschnitte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser«. Daher die Construction wie in §. 172. 1.

2) In n Theile, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 172. 2. dem unter 1. angeführten Satze gemäß.

Anhang

betreffend

die Grundlehren, und Hauptoperationen der niedern Feldmeßkunst.

Einleitung.

§. 177. Ueber die Form, und Größe der Erde — nach folgenden Andeutungen:

1) Verschiedene Hypotheſen über die Form des Erdkörpers.

2) Gründe für die kugelähnliche (ſphäroidiſche) Geſtalt deſſelben.

3) Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche. Ungleichheit der Erdhalbmeſſer. Bedeutende Größe derſelben. Geringe Längen-Unterſchiede rückſichtlich dieſer Größe.

4) Mittlere Halbmeſſer der Erde. Schätzung ſeiner Länge auf 19619050 Pariſer Fuß.

§. 178. Begriffserklärungen, nebſt Folgerungen. — Was man verſteht:

1) Unter Verticallinien, und Verticalflächen; unter Horizontallien, und Horizontalflächen beliebiger Erdenörter — nebſt Angabe in wie fern man die Centralanziehung des Erdkörpers benutzt, um für jeden Punkt der Erdoberfläche die Richtung der erſtern, und die Lage der letztern vermittelſt des freihangenden Bleiloths, und des offenen Waſſerſtandes bemerklich zu machen.

2) Unter dem wahren oder ſphäriſchen Horizont, und unter dem ſcheinbaren oder ebenen Horizont eines Erdenortes. — Parallelismus aller wahren Horizontalflächen. Geringe Krümmungsverſchiedenheit derſelben, wegen geringer Längendifferenzen ihrer Halbmeſſer (§. 177. 3). In den meiſten Fällen dürfen ihre Krümmungsformen ſowohl untereinander, als auch mit jenen des zum mittleren Halbmeſſer (§. 177. 4.) gehörigen Grundhorizonts für gleichbedeutend genommen werden.

3) Unter der Horizontal-Projection, und Vertical-Projection beliebiger Punkte, Linien, und ſonſtiger Figuren der Erdoberfläche, — und wie man in dieſer Beziehung für je zwei Punkte der Erdoberfläche (Ortspunkte) unterſcheidet zwiſchen ihrer wahren, ihrer

örtlichen, und ihrer horizontalen Entfernung; zwischen ihrer absoluten, und ihrer relativen Höhe.

Horizontal-Projectionen von höchstens zwei Meilen Längen-Erstreckung, und vier Quadratmeilen Flächen-Ausdehnung dürfen, ohne merkliche Abweichung von der Wahrheit, wegen ihrer geringen Convexkrümmung, als gerade Linien oder Ebenen betrachtet werden.

§. 179. Definition der Geodäsie oder Erdmeßkunst als Inbegriff derjenigen Wissenschaften, und Kunstfertigkeiten, deren man sich zur Projectionsbestimmung beliebiger Punkte, Linien, und Stücke der Erdoberfläche (§. 178, 3.) und ihrer figürlichen Darstellung in möglichst ähnlichen Abbildungen (Charten) bedient.

Nähere Bezeichnung der hierzu nöthigen Wissenschaften, und Kunstfertigkeiten.

§. 180. Eintheilung der Geodäsie oder Erdmeßkunst in: höhere, und niedere Geodäsie, oder in Landmeßkunst, und Feldmeßkunst. — Der Charten in geographische, und topographische; in Grundrisse, und Profilrisse. — Grenzen der Feldmeßkunst (§. 178. 3.)

§. 181. Benutzung der Feldmeßkunst zu mancherlei Zwecken des bürgerlichen Lebens — Daraus hervorgehende Nothwendigkeit für die Anwendung landesüblicher gesetzlich bestimmter Maßsysteme.

Abhängigkeit aller Längen-, Flächen-, und Körper-Maße eines Maßsystems von einer festgesetzten Längen-Einheit — Verschiedenheit der Maßsysteme hinsichtlich solcher Längen-Einheiten, und deren Benutzung für die Bildung aller übrigen Maßarten. — Pflicht des Feldmessers sich mit den gebräuchlichsten Maßsystemen bekannt zu machen.

§. 182. Preußisches und Französisches Maßsystem.

A. Preußisches Maßsystem.

a. Längen-Maße; nach der Duodecimal-, und Decimal-Eintheilung.

Die gesetzlich bestimmte, aus 12 Rheinländischen Fußen zusammengesetzte Grund-Einheit heißt: Ruthe — der 12te Theil der Ruthe: Duodecimalfuß, der 10te Theil der Ruthe: Decimalfuß — der 12te Theil des Duodecimalfußes: Duodecimalzoll, der 10te Theil des Decimalfußes: Decimalzoll — der 12te Theil des Duodecimalzolls: Duodecimallinie, der 10te Theil des Decimalzolls: Decimalli-

nie — etc. — In Künsten, und Handwerken bedient man sich gewöhnlich des Duodecimalmaßes, in der Feldmessung aber des Decimalmaßes, daher heißt ersteres auch Werkmaß, letzteres Feldmaß. — Ruthen werden durch °, Fuße durch ′, Zolle durch ″, und Linien durch ‴ bezeichnet, für die Duodecimal-Eintheilung entweder ohne nähere Bezeichnung, oder durch Beifügung der Buchstaben dd, für die Decimal-Eintheilung durch Beifügung der Buchstaben dc.

Zur Vergleichung obiger Längenmaß-Benennungen dienen folgende Verhältnißtabellen:

1. Für das Duodecimalmaß.
   $1° = 12′ = 144″ = 1728‴$ etc.
2. Für das Decimalmaß.
   $1° = 10′ = 100″ = 1000‴$ etc.
3. Für beiderlei Maße
   $12′\,dd = 10′\,dc$; $144″\,dd = 100″\,dc$; $1728‴\,dd = 1000‴\,dc$.

Aufg. 1. Man soll mit Hülfe dieser Verhältnißgleichungen verwandeln: 1) Prß. dd. Maß in Prß. dc. Maß. — 2) Prß. dc. Maß in Prß. dd. Maß.

Bildung allgemeiner Buchstabenformeln für beiderlei Verwandlungen.

NB. Die Prß. Elle ist $= 2′; 5\frac{1}{2}″.dd$. Die Prß. Meile $= 2000°$.

b. Flächen-Maße; nach der Duodecimal-, und Decimal-Eintheilung.

Grund-Einheit: Die Quadratruthe, mit einer Längenruthe als Seite. — Unterabtheilungen sind: der Quadratfuß, der Quadratzoll, die Quadratlinie, dd oder dc, jenachdem die Seitenlänge ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, dd oder dc, ist. — Bezeichnet wird die Quadratruthe durch □°, der Quadratfuß durch □′, der Quadratzoll durch □″, die Quadratlinie durch □‴. — Die Beifügung des dd, oder dc giebt zu erkennen, ob duodecimales, oder decimales Maß gemeint ist.

Zur Vergleichung dieser Maßbenennungen dienen folgende Verhältnißtabellen:

1) Für Duodecimalmaß
   $1.□° = 144.□′ = 20736.□″ = 2985984.□‴$.
2) Für Decimalmaß
   $1.□° = 100.□′ = 10000.□″ = 1000000.□‴$.

3) Für beiderlei Maße

144. □′. dd = 100. □′. dc.; 20736. □″. dd = 10000. □″. dc;
2985984. □‴. dd = 1000000. □‴. dc.

Aufg. 2. Man soll mit Hülfe dieser Verhältnißgleichungen verwandeln. 1) Prß. Quadratmaß dd, in Prß. Quadratmaß dc. 2) Prß. Quadratmaß dc. in Prß. Quadratmaß dd.

Bildung allgemeiner Buchstabenformeln für beiderlei Verwandlungen.

NB. Ein Prß. Morgen Landes enthält 180[]°; eine Prß. Quadratmeile: 4000000[]°.

c. Körper-Maße; nach der Duodecimal-, und Decimal-Eintheilung.

Grund-Einheit: die Cubikruthe, mit einer Längenruthe als Seite. Unterabtheilungen sind: der Cubikfuß, der Cubikzoll, die Cubiklinie, dd oder dc, jenachdem die Seitenlänge ein Fuß, ein Zoll, eine Linie, dd oder dc, ist. — Cubikruthen, Cubikfuße, Cubikzolle, und Cubiklinien können durch k°, k′, k″, k‴, bezeichnet werden.

Zur Vergleichung dieser Maßbenennungen dienen folgende Verhältnißtabellen.

1. Für Duodecimalmaß.

1.k° = 1728.k′ = 2985984.k″ = 5159780352.k‴.

2. Für Decimalmaß

1.k° = 1000.k′ = 1000000.k″ = 1000000000.k‴.

3) Für beiderlei Maße

1728.k′.dd = 1000.k′.dc; 2985984.k″.dd = 1000000.k″.dc.
5159780352.k‴.dd = 1000000000.k‴.dc.

Aufg. 3. Man soll mit Hülfe dieser Verhältnißgleichungen verwandeln: 1) Prß. Cubikmaß dd, in Prß. Cubikmaß dc. — 2) Prß. Cubikmaß dc, in Prß. Cubikmaß dd.

Bildung allgemeiner Buchstabenformeln für beiderlei Verwandlungen.

NB. Den gesetzlichen Bestimmungen gemäß soll enthalten:

1 Prß. Klafter: 108.k′.dd. — 1 Prß. Scheffel: 3070.k″.dd. — 1 Prß. Metze = $\frac{1}{16}$ Scheffel = 192.k″.dd. — 1 Prß. Quart = $\frac{1}{4}$ Metze = 64.k″.dd. — Ein Anker: 30 Quart; ein Eimer 60 Quart; ein Ohm: 120 Quart; ein Oxhoft: 180 Quart; eine Biertonne: 100 Quart.

s. die Maß-, und Gewicht-Ordnung für die Prß. Staaten. 1816.

B. Französisches Maßsystem.

a. Längen-Maße. Aeltere und neuere.

Aeltere Grund-Einheit: Der Königsfuß (pied du roi) — der

12" Theil dieſes Fußes heißt: Zoll (pouce) — der 12" Theil des Zolls: Linie (ligne) — der 10" Theil der Linie: Punkt (point). — Sechs Fuße bilden die Länge einer Toise. — Fuße, Zolle, Linien, Punkte, werden ′, ″, ‴, ⁗ bezeichnet, die Toise durch to. Neuere Grund-Einheit: das Métre, der 10000000" Theil eines Meridian-Quadranten. — Verzehnfachungen des Métre werden durch Verbindung des Wortes métre mit den vorgeſetzten griechiſchen Zahlwörtern: Deca, Hecto, Kilo, Myria; Zehntheilungen deſſelben eben ſo durch Vorſetzung der lateiniſchen Zahlwörter: Deci, Centi, Milli ausgedrückt. Man verſteht demnach unter: Decamétre, Hectométre, Kilométre, Myriamétre: 10; 100; 1000; 10000 Métre; und unter Decimétre, Centimétre, Millimetre: $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$ Métre. — Zur Abkürzung des Wortes: Métre, Decamétre, Hectométre, Kilométre, Myriamétre; Decimétre, Centimétre, Millimétre bedient man ſich folgender Zeichen: m, Dm, Hm, Km, Mm, dm, cm, mm.

Zur Vergleichung dieſer Maßbenennungen dienen folgende Verhältnißtabellen:

1. Für älteres Maß

$1' = 12'' = 144''' = 1440'''';\ 1^{to} = 6'.$

2. Für neueres Maß

$1^m = 0{,}1.\mathrm{Dm} = 0{,}01.\mathrm{Hm} = 0{,}001.\mathrm{Km} = 0{,}00001.\mathrm{Mm}$

$1^m = 10.\mathrm{dm} = 100.\mathrm{cm} = 1000.\mathrm{mm}.$

3. Für beiderlei Maße

$1^{to} = 1{,}9490366.\mathrm{m}$; oder log. = 0,2898200.
$1' = 0{,}3248394.\mathrm{m}$; oder log. = 0,5116687 — 1.
$1'' = 0{,}02706994.\mathrm{m}$; oder log. = 0,4324874 — 2.
$1''' = 0{,}0025583.\mathrm{m}$; oder log. = 0,3533062 — 3.
$1^m = 0{,}513074^{to}$; oder log. = 0,7101829 — 1.
$1^m = 3{,}078444'$; oder log. = 0,4883313.
$1^m = 36{,}94133''$; oder log. = 1,5675125.
$1^m = 443{,}2958'''$; oder log. = 2,6466937.

Aufg. 4. Man ſoll mit Hülfe dieſer Verhältnißgleichungen verwandeln: 1) Alt frz. Längenmaß in neu frz. — 2) Neu frz. Längenmaß in alt frz.

Bildet man für jede Verhältnißgleichung alle Vervielfachungen bis zum 9fachen, so lassen sich die vorstehenden Aufgaben durch bloße Addition jener Vervielfachungen lösen. Um z. B. 75,34′ in Meter zu verwandeln, würde man von der Gleichung $1' = 0{,}3248394^{m}$ nehmen: das 7fache 10mal, das 5fache 1mal, das 3fache $\frac{1}{10}$ mal, das 4fache $\frac{1}{100}$ mal, und diese durch bloßes Commatisiren erhaltenen Ausdrücke addiren.

NB. Die franz. Elle ist $= 1{,}880548^{m} = 5{,}789162'$.

b. Flächen-Maße. Aeltere und neuere.

Aeltere Grund-Einheit: Der Quadratfuß □′. — Unterabtheilung desselben sind: der Quadratzoll □″, die Quadratlinie □‴ — Ein größeres Flächenmaß ist die Quadrattoise $□^{to} = 36□'$

Die neuere Grund-Einheit heißt: Are, ein Quadrat dessen Seite 10 Meter beträgt — Höhere und niedere Maßbenennungen werden durch Verzehnfachungen und Zehntheilungen gebildet, und bezeichnet wie bei Längenmaßen, nur mit dem Unterschiede daß das dortige Grundwort métre hier mit dem Grundworte are vertauscht wird. Man hat demnach Decare, Hectare, Kilare, Myriare; oder kürzer D.ar, H.ar, K.ar, M.ar, bedeutend 10, 100, 1000, 10000 Are, und Deciare, Centiare, Milliare, oder d.ar, c.ar, m.ar, bedeutend $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ Are. — Woraus sich auch ergiebt daß Centiare und Quadratmeter gleich groß sind.

Zur Vergleichung dieser Maßbenennungen dienen folgende Verhältnißtabellen:

1. Für älteres Flächenmaß.

   $1.□' = 144.□'' = 20736.□'''$; $1.□^{to} = 36.□'$.

2. Für neueres Flächenmaß

   1.ar = 0,1.D.ar = 0,01.H.ar = 0,001.K.ar = 0,0001.M.ar.

   1.ar = 10.d.ar = 100.c.ar = 1000.m.ar.

3. Für beiderlei Maße

   $1.□^{to} = 0{,}0379874^{ar}$; oder log. = 0,5796409 — 2.

   $1.□' = 0{,}0010552.^{ar}$; oder log. = 0,0233351 — 3.

   $1^{ar} = 26{,}32449.□^{to}$; oder log. = 1,4203587.

   $1^{ar} = 947{,}6817.□'$; oder log. = 2,9766625.

Aufg. 5. Man soll mit Hülfe dieser Verhältnißgleichungen verwandeln: 1) Altfrz. Flächenmaß in neufrz. — 2) Neufrz. Flächenmaß in altfrz.

Ueber die Lösungsmethode dieser Aufgaben, mittelst Vervielfachungstabellen der vorstehenden Verhältnißgleichungen s. Aufg. 4.

NB. Sollen nicht Ares sondern Quadratmeter in Rechnung gebracht werden, so kann dies leicht geschehn, wenn man bedenkt, daß die Are = 100 Quadratmetern ist.

c. **Körper-Maße. Aeltere und neuere.**

Aeltere Grund-Einheit: der Cubikfuß k′ — Unterabtheilungen desselben sind: der Cubikzoll k″, die Cubiklinie k‴ — Größeres Körpermaß: die Cubiktoise $k^{to} = 216k'$.

Die neuere Grund-Einheit heißt: Litre, ein Cubus dessen Seite $\frac{1}{10}$ Meter lang ist. — Hieraus ergeben sich, wie bei Längen-, und Flächen-Maßen, die Benennungen, und Bedeutungen der höheren, und niederen Körpermaße: Decalitre, Hectolitre, Kilolitre, Myrialitre; Decilitre, Centilitre, etc., mit der abgekürzten Schreibart: D.li, H.li, K.li, M.li; d.li, c.li, m.li. — Ein Kilolitre heißt auch Stere, und ist gleich einem Cubikmeter.

Zur Vergleichung dieser Maßbenennungen dienen folgende Verhältnißtabellen:

1. Für älteres Körpermaß

$1.k' = 1728.k'' = 2985984.k'''$; $1.k^{to} = 216.k'$.

2. Für neueres Körpermaß

$1^{li} = 0{,}1.Dli = 0{,}01.Hli = 0{,}001.Kli$ oder st.
$1^{li} = 10.dli = 100.cli = 1000.mli$.

3. Für beiderlei Maße

$1.k^{to} = 7403{,}8904^{li}$; oder log. = 3,8694599.
$1.k' = 34{,}277270^{li}$; oder log. = 1,5350062.
$1^{li} = 0{,}00135064.k^{to}$; oder log. = 0,1305395 — 3.
$1^{li} = 0{,}2917385.k'$; oder log. = 0,4649938 — 1.

Aufg. 6. Man soll mit Hülfe dieser Verhältnißgleichungen verwandeln: 1) Altfrz. Körpermaß in neufrz. — 2) Neufrz. Körpermaß in altfrz.

Ueber die Lösung dieser Aufgaben mittelst der Additionsmethode vergleiche Aufgabe 4.

NB. Da 1 Liter = 0,001 Stere oder Cubikmeter ist, so können statt der Liter sehr leicht Stere, oder Cubikmeter in Rechnung gebracht werden.

C. Vergleichung des Preußischen Maßsystems mit dem Französischen.

a) Längenmaße.

NB. Unter 1'prß. wird der preußische Duodecimalfuß verstanden.

1°prß. = 1,932361^{to}frz.; oder log. = 0,2860882.
1°prß. = 11,59417'frz.; oder log. = 1,0642397.
1°prß. = 3,766243^{m}frz.; oder log. = 0,5759084.
1'prß. = 0,1610301^{to}frz.; oder log. = 0,2069071 — 1.
1'prß. = 0,9661805'frz.; oder log. = 0,9850582 — 1.
1'prß. = 0,3138535^{m}frz.; oder log. = 0,4967270 — 1.

1^{to}frz. = 0,5175016°prß.; oder log. = 0,7139117 — 1.
1^{to}frz. = 6,2100194'prß.; oder log. = 0,7930929.
1'frz. = 0,0862503°prß.; oder log. = 0,9357605 — 2.
1'frz. = 1,03500323'prß.; oder log. = 0,0149404.
1^{m}frz. = 0,26655166°prß.; oder log. = 0,4257814 — 1.
1^{m}frz. = 3,1861995'prß.; oder log. = 0,5032729.

Aufg. 7. Man soll mit Hülfe der vorstehenden Verhältnißgleichungen verwandeln:

1) Prß. Längenmaß in Frz. — 2) Frz. Längenmaß in Prß.

Ueber die Lösung dieser Aufgaben durch bloße Addition der vervielfachten Verhältnißgleichungen s. Aufg. 4.

NB. Am Ende dieses Werks findet man unter den Ueberschriften A. und B. zwei Tafeln, von welchen die erstere eine Vergleichung verschiedener landesüblicher Fußlängen mit der Länge des Prß. Duodecimalfußes (des Rheinländischen), die letztere eine Vergleichung verschiedener landesüblicher Meilen nach derselben Fußlänge darbietet.

b) Flächenmaße.

NB. Unter 1□'prß. wird der preußische Duodecimal-Quadratfuß verstanden.

1□°prß. = 3,734019□^{to}frz.; oder log. = 0,5721765.
1□°prß. = 134,4247□'frz.; oder log. = 2,1284787.
1□°prß. = 14,184586□^{m}frz; oder log. = 1,1518167.
1□'prß. = 0,0259307□^{to}frz.; oder log. = 0,4138141 — 2.
1□'prß. = 0,9335048□'frz.; oder log. = 0,9701165 — 1.
1□'prß. = 0,09850402□^{m}frz.; oder log. = 0,9933543 — 2.

$1\square^{to}$frz. = 0,267879$\square^{o}$prß.; oder log. = 0,4278234 — 1.
$1\square^{to}$frz. = 38,56434$\square'$prß.; oder log. = 1,5861859.
$1\square'$frz. = 0,0074391$\square^{o}$prß.; oder log. = 0,7815209 — 3.
$1\square'$frz. = 1,071232$\square'$prß.; oder log. = 0,0298832.
$1\square^{m}$frz. = 0,0710498$\square^{o}$prß.; oder log. = 0,8515628 — 2.
$1\square^{m}$frz. = 10,151867$\square'$prß.; oder log. = 1,0065451.

Aufg. 8. Man soll mit Hülfe der vorstehenden Verhältnißgleichungen verwandeln:

1) Prß. Flächenmaß. in Frz. — 2) Frz. Flächenmaß in Prß.

Ueber die Lösung dieser Aufgaben mittelst Addition etc. vergleiche Aufgabe 4.

NB. Soll statt des Quadratmeters die Are in Rechnung gezogen werden, so läßt sich dies leicht ausführen vermittelst der Verhältnißgleichung $1[]^{m} = 0{,}01.ar$.

NB. Am Ende des Werks findet man unter der Aufschrift C. eine Tafel, welche verschiedene landesgebräuchliche größere Flächenmaß-Benennungen enthält, und deren Inhalt nach Prß. Quadratruthen angiebt.

c. Körpermaße.

NB. Unter k′ prß. wird hier der preußische Duodecimal-Cubikfuß verstanden.

$1k^{o}$prß. = 7,2154728k^{to}frz.; oder log. = 0,8582647.
$1k^{o}$prß. = 1558,5424k'frz.; oder log. = 3,1927186.
$1k^{o}$prß. = 53,422599k^{m}frz.; oder log. = 1,7277250.
$1k'$prß. = 0,0041766k^{to}frz.; oder log. = 0,6208252 — 3.
$1k'$prß. = 0,9019341k'frz.; oder log. = 0,9551747 — 1.
$1k'$prß. = 0,0309158k^{m}frz.; oder log. = 0,4901809 — 2.

$1k^{to}$frz. = 0,1385910k^{o}prß; oder log. = 0,1417350 — 1.
$1k^{to}$frz. = 239,4853k'prß.; oder log. = 2,3792788.
$1k'$frz. = 0,0006416k^{o}prß.; oder log. = 0,8072810 — 4.
$1k'$frz. = 1,1087283k'prß.; oder log. = 0,0448250.
$1k^{m}$frz = 0,0189384k^{o}prß.; oder log. = 0,2773415 — 2.
$1k^{m}$frz. = 32,34587k'prß.; oder log. = 1,5098188.

Aufg. 9. Man soll mit Hülfe der vorstehenden Verhältnißgleichungen verwandeln:

1) Prß. Körpermaß in Frz. — 2) Frz. Körpermaß in Prß.

Ueber die additive Lösung dieser Aufgaben vergleiche die Bemerkung zu Aufg. 4.

NB. Vorstehende Tabellen sind mit Sorgfalt berechnet worden; und dürfen deshalb auf den Charakter der Zuverläßigkeit Anspruch machen. Die darin vorkommenden Logarithmen beziehn sich auf siebenstellige Zahlen, auch dort, wo einige dieser Stellen weggelassen sind.

Am Ende des Werks findet man, unter den Buchstaben D. und E., zwei Tabellen, zur Vergleichung verschiedener landesgebräuchlicher Frucht-, und Flüssigkeits-Maße (Hohlmaße).

§. 183. **Verjüngungs-Maße zur Verzeichnung topographischer Grund-, und Profil-Risse (§. 180.)**

1. Maßsysteme nach beliebigen Verhältnissen verkleinern heißt: sie verjüngen. Der Quotient eines solchen Verhältnisses mag ganz passend Verjüngungsfactor genannt werden. Er bildet dem Begriffe zu Folge, einen echten Bruch; und erzeugt eine um so kleinere Verjüngung, je kleiner er selbst ist.

2. Im Allgemeinen kann sich der Verjüngungsfactor auf Längen-, Flächen-, und Körper-Maßverkleinerung beziehn; und in jedem dieser Fälle entweder von bestimmter, oder von wählbarer Größe sein. Dergleichen Größenbestimmungen sind theils von den Ausdehnungen der Grundfigur, theils von der Räumlichkeit der Verzeichnungsfläche, theils von den Detaillirungszwecken der Aufnahme abhängig.

3. Bezeichnet man, der Kürze wegen, irgend eine Grundfigur durch G, eine ihr ähnliche Verjüngtheit durch g; gleichnamige Längen-, Flächen-, und Körper-Maßeinheiten in beiden Figuren durch die entsprechenden Buchstaben L, l; F, f; K, k; den Verjüngungsfactor des Längenmaßes durch $\frac{m}{n}$ des Flächenmasses durch $\frac{p}{q}$, des Körpermaßes durch $\frac{r}{s}$, so ergiebt sich die gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen leicht aus nachstehenden Grundproportionen:

a. Aus $L:l = n:m$. (1) jenachdem gegeben sind:

entweder $\frac{m}{n}$ und L, oder $\frac{m}{n}$ und l, oder L und l,

$l = \frac{m}{n}.L$. (1); $L. = \frac{n}{m}.l$. (2); $\frac{m}{n} = \frac{l}{L}$. (3). d h?

ferner, wegen Aehnlichkeit zwischen G und g:

$F:f = n^2:m^2$. (4); $K:k = n^3:m^3$. (5). d h?

b. Aus $F:f = q:p$. (II), jenachdem gegeben sind:

entweder $\frac{p}{q}$ und F, oder $\frac{p}{q}$ und f, oder F und f,

$f = \frac{p}{q}.F.$ (1′); $F = \frac{q}{p}.f.$ (2′); $\frac{p}{q} = \frac{f}{F}.$ (3′). d h?

ferner, wegen Aehnlichkeit zwischen G und g:

$L:l = \sqrt{q} : \sqrt{p}.$ (4′); $K:k = \sqrt{q^3} : \sqrt{p^3}.$ (5′). d h?

c. Aus $K:k = s:r.$ (III), jenachdem gegeben sind:

entweder $\frac{r}{s}$ und K, oder $\frac{r}{s}$ und k, oder K und k,

$k = \frac{r}{s}.K.$ (1″); $K = \frac{s}{r}.k.$ (2″); $\frac{r}{s} = \frac{k}{K}.$ (3″). d h?

ferner, wegen Aehnlichkeit zwischen G und g;

$L:l = \sqrt[3]{s} : \sqrt[3]{r}.$ (4″); $F:f = \sqrt[3]{s^2} : \sqrt[3]{r^2}.$ (5″). d h?

Beispiele zur Anwendung dieser Formeln. — Construction der verjüngten Maßstäbe nach §. 140. §. 141. §. 142.

4. Für Vermessungen, welche im Auftrage öffentlicher Behörden ausgeführt werden, ist das Verjüngungsmaß von vorgeschriebener Größe. So finden sich im preußischen Feldmesser-Reglement folgende gesetzliche Bestimmungen:

a. Zur Verzeichnung der topographischen Grundrisse. (des Reglem. §. 25): »Das Auftragen des gemessenen Landes geschieht in der Regel nach »einem verjüngten Maßstabe von Funfzig Ruthen auf ein Hundert»theil der preußischen Ruthe. Jedoch kann auf ausdrückliches Ver»langen der Interessenten auch ein anderer Maßstab dazu gewählt »werden; nur muß derselbe stets ein aliquoter (gleicher) Theil des »Hunderttheils der preußischen Ruthe sein.«

Man erhält demnach die Verhältnißgleichung:

50 Ruthen Verjüngungsmaß $= \frac{1}{100}$ Ruthe ~~Quadratmaß~~ Grundmaß, oder nach der Bezeichnung unter 3.

$50.1^{\circ} = \frac{1}{100}.L^{\circ}$; woraus sich ergiebt:

Die Verjüngungsruthe $1 = \frac{1}{5000}$ der Grundruthe $= 0{,}02$ Decimalzoll, und:

Der Verjüngungsfactor $\frac{m}{n} = \frac{1}{5000}$, der Verjüngungsfactor $\frac{p}{q} = (\frac{1}{5000})^2$. (s. No. 3.).

Wählte man zur Maßverkleinerung die Verhältnißgleichung:
100 Ruthen Verjüngungsmaß = $\frac{1}{100}$ Ruthe Grundmaß, ſo würde ſich ergeben:
Die Verjüngungsruthe 1 = $\frac{1}{10000}$ der Grundruthe = 0,01 Decimalzoll, und:
Der Verjüngungsfactor $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$, der Verjüngungsfactor $\frac{p}{q}$ = $(\frac{1}{100})^2$. (ſ. No. 3.).

b. Zur Verzeichnung von Profilriſſen. (des Reglem. §. 51. §. 52.):
»Auch bei dem Nivellement bleibt das Längenmaß die preußiſche »Ruthe, und deren zehntheilige Eintheiluug. Aber zu den Höhen»maßen wird der preußiſche Fuß gebraucht, welcher ein Zwölftel »dieſer Ruthe, oder 139,13 Linien pariſer Maß iſt, und folglich mit »dem bei uns unter dem Namen des rheinländiſchen Werkſchuhes »bekannten Maße übereinkommt. Dieſer Fuß wird zwölftheilig in »Zolle und Linien getheilt.«.
»Der verjüngte Maßſtab für die Auftragung des Nivellements iſt »zu den Längen Fünf und zwanzig Ruthen, zu den Höhen Fünf und »zwanzig der vorerwähnten Fuße (Duodecimalfuße §. 182. A. a.) »auf ein Hunderttheil der preußiſchen Ruthe (Decimalzoll §. 182. »A. a.), ſo fern nicht in einzelnen Fällen beſondere Vorſchriften ein »anderes Maß ausdrücklich erfordern.«
Demgemäß hat man zur Entwerfung von Profilriſſen,

α. für die Längenverjüngung die Verhältnißgleichung:
25 Ruthen Verjüngungsmaß = $\frac{1}{100}$ Ruthe Grundmaß;
oder, nach der Bezeichnung unter 3. ausgedrückt:
$25.l^o = \frac{1}{100}.L^o$; woraus ſich ergiebt:
die Verjüngungsruthe $l^o = \frac{1}{2500}$ Grundruthe L^o = 0,04 Decimalzoll, und der Verjüngungsfactor $\frac{m}{n} = \frac{1}{2500}$.

β. für die Höhenverjüngung die Verhältnißgleichung:
25 Fuß Verjüngungsmaß = $\frac{1}{100}$ Ruthe Grundmaß,
oder, auf gleiche Benennung gebracht, und nach der Bezeichnung unter 3. ausgedrückt:
$25.l' = \frac{12}{100}.L'$ woraus ſich ergiebt:
der Verjüngungsfuß $l' = \frac{12}{2500}$ Grundfuß L' = 0,04 Decimalzoll, und der Verjüngungsfactor $\frac{m}{n} = \frac{13}{2500}$.

Beide Maßstäbe verhalten sich wie 1:12, woraus erhellt, daß eine, nach denselben ausgeführte, Profilzeichnung nicht ähnlich seyn könne dem von ihr repräsentirten Grundprofil.

5. Zu militairischen Aufnahmen sind in Preußen folgende Maßverjüngungen gesetzlich vorgeschrieben:

a) 1 Meile Verjüngungsmaß = 8 Decimalzoll Grundmaß; oder, gleichnamig gemacht, und nach 3. ausgedrückt: 200000.l″ = 8.L″, woraus sich ergiebt:

$\frac{m}{n} = \frac{1}{25000}$; und $\frac{p}{q} = (\frac{1}{25000})^2$. d. h.?

b) 1 Meile Verjüngungsmaß = 4 Decimalzoll Grundmaß; oder, gleichnamig gemacht, und nach 3 ausgedrückt: 200000.l″ = 4.L″, woraus folgt:

$\frac{m}{n} = \frac{1}{50000}$; und $\frac{p}{q} = (\frac{1}{50000})^2$. d. h.?

c) 1 Meile Verjüngungsmaß = 1½ Decimalzoll Grundmaß, oder, gleichnamig gemacht, und nach 3. ausgedrückt: 200000.l″ = ½.L″, woraus sich ergiebt:

$\frac{m}{n} = \frac{1}{150000}$, und $\frac{p}{q} = (\frac{1}{150000})^2$. d. h.?

Die drei Verjüngungsfactoren der Längen verhalten sich also wie 6:3:1, und die der Flächen wie 36:9:1.

§. 184. Maßsysteme zur Winkelmessung = dazu gehörige Aufgaben.

1) Winkel werden bekanntlich durch aliquote Theile eines Kreisumfanges von beliebigem Halbmesser gemessen, welche mit dem allgemeinen Namen: Gradmaß belegt sind. Es giebt zwei Arten der Kreiseintheilung, die Sexagesimale, und die Centesimale; erstere ist die ältere, und noch jetzt fast überall gebräuchlich; letztere wurde zur Zeit der frz. Revolution, aus Vorliebe für das Decimalsystem, in Frankreich gesetzlich eingeführt.

a) Nach der Sexagesimaltheilung zerfällt der Kreis in 360 Grade, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde in 60 Tertien. — Bezeichnet man, wie gewöhnlich, den zum Halbmesser 1 gehörigen Kreisumfang durch 2π, den Kreisquadrant $= \frac{1}{2}\pi$ durch q, Grade durch °, Minuten durch ′, Secunden durch ″ ꝛc.,

so ergeben sich offenbar folgende leicht verständliche Verhältnißgleichungen:

$2\pi = 4.q$; $1.q = 90°$; $1° = 60'$; $1' = 60''$; ꝛc. (1), und

$1.q = \frac{1}{2}\pi$; $1° = \frac{1}{90}.q$; $1' = \frac{1}{90}°$; $1'' = \frac{1}{60}'$; ꝛc. (2), also

$1.q = 90° = 5400' = 324000'' = 19440000'''$. (3).

b) Nach der Centesimaltheilung zerfällt der Kreis in 400, folglich der Quadrant in 100 Degrés, der Degré in 100 Minutes, die Minute in 100 Secondes, die Seconde in 100 Tierces ꝛc. Man erhält demnach:

$2\pi = 4.q$; $1^q = 100^{dgr}$; $1^{dgr} = 100^{min}$; $1^{min} = 100^{sec}$ (1') und

$1^q = \frac{1}{2}\pi$; $1^{dgr} = 0{,}01^q$; $1^{min} = 0{,}01^{dgr}$; $1^{sec} = 0{,}01^{min}$ (2'), also:

$1^q = 100^{dgr} = 10000^{min} = 1000000^{sec} = 100000000^{tier}$. (3').

c) aus (3) und (3') unter a) und b) entspringen, für die Vergleichung beider Maßsysteme, folgende Verhältnißformeln:

$90° = 100^{dgr}$, also $1° = \frac{10}{9}{}^{dgr}$. (4), und $1^{dgr} = \frac{9}{10}° = (1 - \frac{1}{10})°$. (4').

$54' = 100^{min}$, also $1' = \frac{100}{54}{}^{min}$. (5), und $1^{min} = 0{,}54'$. (5').

$324'' = 1000^{sec}$, also $1'' = \frac{1000}{324}{}^{sec}$. (6), und $1^{sec} = 0{,}324''$. (6').

Meistens bedient man sich in Frankreich des Quadranten, um Grade, Minuten ꝛc. darzustellen; und es leuchtet unmittelbar aus der Erklärung unter b) ein, daß man z. B. 217^{dgr}, 19^{min}, 7^{sec} schreiben darf $2{,}171907^q$, so wie umgekehrt statt $1{,}07348^q$ auch 107^{dgr}, 34^{min}, 80^{sec}.

2) Da der Quadrant für beiderlei Kreiseintheilungen von derselben Größe ist, so kann man sich seiner auch sehr bequem, statt der Formeln (4) bis (6'), bedienen, um die Gradmaße beider Systeme auf einander zu reduciren, und zwar nach folgender allgemeinen Regel:

»Drücke das Gradmaß eines jeden Systems in Theilen des »Quadranten aus, und verwandle das erhaltene Resultat in Grad»maß des andern Systems.«

Zur Erläuterung dieser Regel werden folgende zwei Beispiele genügen:

Aufg. 1. Zu verwandeln $96° + 27' + 45''$ in frz. Gradmaß.

Aufl. Aus a) folgt .. $96° + 27' + 45'' = (\frac{96}{90} + \frac{27}{5400} + \frac{45}{324000})^q$; oder, die einzelnen Brüche in Decimale verwandelt, und addirt:

$96° + 27' + 45'' = 1{,}07180555^q = 107^{dgr} + 18^{min} + 5\frac{5}{9}{}^{sec}$.

Aufg. 2. Zu verwandeln $129^{dgr} + 76^{min} + 9^{sec}$ in altes Gradmaß.

Aufl. Aus b) folgt .. $129^{dgr} + 76^{min} + 9^{sec} = 1{,}297609^q$; oder

die Decimalbruchstellen des Quadranten, durch den Factor 90, auf Grade; die der Grade, durch den Factor 60, auf Minuten; die der Minuten, durch den Factor 60, auf Secunden; die der Secunden ebenso auf Tertien zurückgeführt:

$1{,}297609^q = 116° + 47' + 5'' + 19'''$ beinahe.

3) Die Größe eines Winkels ist entweder in räumlicher, oder in gradmaßlicher Form gegeben; und es kann im Allgemeinen gefordert werden aus einer dieser Größenformen die andere zu bestimmen. Zu diesem Endzweck sollen die hierhergehörigen zwei Aufgaben nach verschiedenen Methoden gelöst werden; wobei wir, der Kürze halber, die räumliche Größe eines Winkels seine geometrische, die gradmaßliche dagegen seine arithmetische Größe nennen wollen.

Aufg. 1. (Fig. 108). Aus der geometr. Größe eines Winkels α genau oder näherungsweise zu bestimmen die arithmetische.

Aufl. 1. Durch Anwendung des Transporteurs, oder ähnlicher Instrumente, z. B. der Gradrose, nach §. 2. 5.

Aufl. 2. Durch Errichtung, oder Fällung eines Perpendikels zwischen den Schenkeln des Winkels α, oder seines Supplements α', falls α stumpf wäre; und Bestimmung des spitzen Winkels α, oder α', aus dem erzeugten rechtwinkligen Dreieck $\alpha\beta\gamma$, mittelst Messung zweier Seiten, und Anwendung der Trigonometrie. Man erhält nemlich, wenn $\gamma\beta$ das verlangte Perpendikel ist (§. 4), und entweder $\alpha\beta = c$, und $\gamma\beta = a$; oder $\alpha\beta = c$, und $\alpha\gamma = b$; oder $\gamma\beta = a$, und $\alpha\gamma = b$, nach §. 2. 2 gemessen worden, nachstehende drei Grundformeln zur Bestimmung des Winkels α

$$\sin.\alpha = \frac{a}{c}. \quad (1); \text{ folglich } \alpha = \text{arc.}(\log.\sin.\alpha = \log.a - \log.c). \quad (1').$$

$$\cos.\alpha = \frac{b}{c}. \quad (2); \text{ folglich } \alpha = \text{arc.}(\log.\cos.\alpha = \log.b - \log.c). \quad (2').$$

$$\text{tg}.\alpha = \frac{a}{b}. \quad (3); \text{ folglich } \alpha = \text{arc.}(\log.\text{tg}.\alpha = \log.a - \log.b). \quad (3').$$

Beispiele. Es sey für (1) $c = 19'$; $a = 8'$; für (2) $c = 5{,}8'$; $b = 2{,}7'$; für (3) $a = 13'$; $b = 6'$.

Aufl. 3. Schneide auf beiden Schenkeln, vom Scheitel aus, gleiche Stücke ab, $\alpha\beta = \alpha\delta$; ziehe die Verbindungslinie $\beta\delta$, messe $\alpha\beta = \alpha\delta = c$, $\beta\delta = d$ (§. 2. 2), und wende den Satz an: »jede Kreissehne ist gleich dem Sinus des ihr zugehörigen halben Centriwinkels,

multiplicirt mit dem Durchmeſſer des Kreiſes, ſo ergibt ſich für α nachſtehende Beſtimmungsformel:

$2c.\ \sin.\frac{1}{2}\alpha = d$, oder $\sin.\frac{1}{2}\alpha = \frac{d}{2c}$ (4), folglich:

$\alpha = 2.\ \text{arc.}\ (\log.\sin.\frac{1}{2}\alpha = \log. d - \log. 2c)$. (4′).

Beiſpiel. Es ſei $c = 37'$, $d = 11'$.

Aufg. 2. (Fig. 108). Aus der arithmetiſchen Größe eines Winkels α genau oder näherungsweiſe zu beſtimmen die geometriſche.

Aufl. 1. Vermittelſt des Transporteurs, oder eines ähnlichen Inſtruments, nach §. 4. 4.

Aufl. 2. Vermittelſt der Formeln (1), (2), (3) unter Aufg. 1., durch willkührliche Annahme einer der darin vorkommenden Dreieckſeiten, und Beſtimmung der andern. Setze nemlich in (1), (2) die Seite $c = 1$, in (3) die Seite $b = 1$, ſo ergeben ſich folgende Formeln, aus (1):

$a = \sin.\alpha$. (5); oder $a = \text{num. log. sin.}\ \alpha$. (5′); aus (2):

$b = \cos.\alpha$. (6); oder $b = \text{num. log. cos.}\ \alpha$. (6′); aus (3):

$a = \text{tg.}\ \alpha$. (7); oder $a = \text{num. log. tg.}\ \alpha$. (7′).

Die für a und b berechneten Werthe werden, vermittelſt eines Maßſtabes, worauf $c = 1$ iſt, nach §. 2. 1. in linearer Form dargeſtellt, und ſo zur Conſtruction des rechtwinkligen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, wodurch dann auch der Winkel α entſpringt, nach §. 17. 2 benutzt. Dieſes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ wird aber conſtruirt nach der Formel (5) aus $c = 1$, und dem bekannten a; nach der Formel (6) aus $c = 1$, und dem bekannten b; nach der Formel (7) aus $b = 1$, und dem bekannten a.

Beiſpiele. $\alpha = 17° + 8' + 11''$; $\alpha = 35° + 24' + 10''$; $\alpha = 102° + 18' + 17''$.

Aufl. 3. Vermittelſt der obigen Formel (4), in welcher die wählbare Länge $c = 1$ geſetzt werden kann, erhält man:

$d = 2.\ \sin.\frac{1}{2}\alpha$. (8), oder $d = \text{num. (log. 2} + \log.\sin.\frac{1}{2}\alpha)$. (8′).

woraus α in geometriſcher Größe gefunden wird, wenn man aus $c = 1$, als Maßeinheit, das berechnete d beſtimmt (§. 2. 1); ſodann mit c einen Kreis beſchreibt (§. 1. 2), in denſelben die Gerade d, als Sehne, legt (§. 12. 1), und den zu dieſer Sehne gehörigen Centriwinkel, durch Ziehung der Halbmeſſer, conſtruirt. — Beiſpiel. Es ſey $\alpha = 35° + 17' + 13''$.

NB. In manchen Büchern findet man sogenannte Chordentafeln, zur unmittelbaren Bestimmung des d aus α, und umgekehrt, abgedruckt. Wer mit trigonometrischen Rechnungen vertraut, und mit trigonometrischen Tafeln versehen ist, kann dergleichen Chordentafeln entweder selbst leicht anfertigen, oder auch entbehren.

§. 185. **Werkzeuge, Geräthschaften, und sonstige Hülfsmittel zur Feldvermessung.**

A) **Geräthschaften zu Punktbezeichnungen auf dem Felde.**

1) **Signale** — abgeschälte Baumstämme von 20 bis 30 Fuß Länge. Sie werden in Hauptpunkten einer aufzunehmenden Gegend vertical aufgestellt, um dieselben in bedeutender Ferne zu versichtbaren; zu welchem Endzwecke sie am obern Ende mit einem wohlbedach'ten Gitterkasten, zur Aufnahme von hellleuchtenden Strohgarben, versehen sind. — Zuweilen werden auch Thürme, hohe Nadelbäume, und sonstige erhabene Gegenstände zu dergleichen Signalisirungen benutzt.

2) **Meßfahnen** — cylindrische Stäbe von Kiefern-, Tannen-, oder Buchenholz, 10 bis 16 Fuß lang, 1 bis 1½ Zoll dick. — Sie vertreten, bei Messungen von geringem Umfange, die Stelle der Signale; weshalb sie am untern Ende, um besser das Erdreich durchdringen zu können, mit einer eisernen Spitze; am obern Ende aber, zur deutlichern Versichtbarung der bezeichneten Feldpunkte, mit Fahnen, halb von weißer, und halb von rother Farbe, versehen sind. — Um sie gegen den verderblichen Einfluß der Witterung zu schützen, pflegt man sie mit Oehlfarbe zu überziehen. — Die Anzahl der Meßfahnen ist von der Beschaffenheit des Terrains abhängig, und darf nicht wohl weniger als 4 betragen.

3) **Absteckstäbe** — cylindrische Stäbe von Tannen-, oder Kiefernholz, 6 bis 8 Fuß lang, 1 bis 1½ Zoll dick; im Uebrigen wie die Meßfahnen, mit Ausschluß der hier fehlenden Fahnen am obern Ende. — Man bedient sich ihrer zur Bezeichnung von Zwischenpunkten, also zur Absteckung von Linien, und verticalen Ebenen. — Die Anzahl richtet sich zum Theil nach der Länge der abzusteckenden Linien, und kann nicht wohl unter 6 genommen werden.

4) **Zeichenstäbe** — zugespitzte cylindrische Stäbchen aus hartem Holze, 8 bis 12 Zoll lang, ½ Zoll dick. — Sie werden gebraucht, um bei Längenmessungen mit der Kette die Einsatzpunkte des vordern

Kettenstabes, und zugleich die Anzahl der gemachten Kettenzüge zu bezeichnen. Deshalb werden sie durch den vordern Kettenzieher ausgesteckt, und durch den hintern eingesammelt. — Ihre Anzahl ist willkührlich, mit 10 derselben kann der angeführte Zweck, auch bei Messung sehr langer Linien, recht wohl erreicht werden.

5) Pflöcke — zugespitzte Holzscheite, von 1 bis 2 Fuß Länge — sie dienen entweder zur Bezeichnung gewisser Winkelpunkte einer Feldfigur, oder auch zu Punktbezeichnungen richtig abgesteckter Linien.

B) Werkzeuge zur Vertical-, und Horizontal-Stellung von Linien, und Ebenen auf dem Felde (§. 178).

6) Das Bleiloth — ein an einem Faden befestigtes Bleigewicht, zur Richtbestimmung verticaler Linien. (§. 178. 1).

7) Die Setzwage — ein bekanntes Werkzeug zur Horizontalstellung von Linien und Ebenen, vermittelst des Bleiloths; zuweilen mit einem, den Mittelpunkt der Basis berührenden, graduirten Kreisbogen versehen, um den Neigungswinkel schiefstehender Ebenen messen zu können. — Die Richtigkeit des Werkzeugs wird leicht durch Drehung der Basis auf einer horizontalen Ebene geprüft.

8) Die Libelle — zwei Arten derselben: lange, oder cylindrische; und runde, oder dosenförmige — Beider Einrichtung beruht auf Horizontalstellung freibeweglicher Flüssigkeiten bei Eintritt der Ruhe (§. 178. 1). — Die nähere Beschreibung dieser, nur der Form nach verschiedenen, Werkzeuge bleibt mündlichen Erläuterungen überlassen — zur Füllung bedient man sich des reinen Weingeistes — Bei Libellen der ersten Art darf die cylindrische Glasröhre weder zu kurz, noch zu eng seyn; für die Länge pflegt man 10 bis 12 Zoll, für die Weitung einen Durchmesser von 3 Zollen zu wählen. Bei dosenförmigen Libellen muß das, auf der innern Seite concav ausgeschliffene, Deckglas nur wenig von einer Ebene verschieden seyn, wenn die, von der Größe einer Erbse, darunter befindliche Luftblase leicht beweglich bleiben soll. — Beide Libellenarten werden zur Horizontalstellung von Linien und Ebenen gebraucht, und ihre Richtigkeit eben so geprüft, wie die der Setzwage.

9) Die Kanalwage — eine hohle, 4 bis 5 Fuß lange, 1 bis 2 Zoll weite, Blech- oder Messingröhre, deren beide Enden rechtwinklig nach oben gekrümmt, und durch eingekittete Glascylinder, von 5 bis 6 Zoll Höhe, fortgesetzt sind, um dadurch den Horizontalstand des

im Innern befindlichen, bis in die Cylinder hineinragenden, gefärbten Wassers bemerklich zu machen. Am untern Mittelpunkt der Blechröhre ist eine Hülse angebracht, um das Werkzeug, mittelst derselben, auf den Zapfen eines ein-, oder dreibeinigen Stativs setzen zu können. Um die Bildung von Luftblasen im Innern des Instruments zu verhindern, pflegt man, der Hülse gegenüber, die Blechröhre zu durchbohren; und in diese Durchbohrung eine kleine Glasröhre einzumünden, die jedoch, nach hydrostatischen Gesetzen, über den Wasserstand in den beiden Endcylindern hinausragen muß. — Man bedient sich dieses sehr einfachen, aber auch unvollkommenen Werkzeuges zur Richtbestimmung horizontaler Visirlinien; und begegnet der Unbestimmtheit des Wasserstandes nach den obern Rändern durch den Gebrauch der sogenannten Schwimmer.

10) Die Quecksilberwage — ihre Einrichtung beruht auf dem Horizontalstand freier Flüssigkeiten, also auch des Queckſilbers, und ist mannigfacher Abänderungen im äußern Mechanismus fähig. — Um die Richtung horizontaler Visirlinien vermittelst dieses Instruments zu erhalten, bedient man sich meistens zweier würfelförmiger Schwimmer von gleicher Materie, gleichem Gewichte, und gleicher Größe ꝛc.

11) Die Sissonsche, und Reichenbachsche Wasserwage. — Beider Einrichtung gründet sich auf den eben angeführten Satz der Hydrostatik. — Der Zweck ihres Mechanismus besteht darin: ein drehbares Visirungsfernrohr, mittelst einer damit parallel laufenden langen Libelle (8), in eine horizontale Lage zu bringen; zu welchem Behufe die Stative beider Werkzeuge mit mehreren Stellschrauben versehen sind. Die wirkliche Anschauung derselben giebt hierüber die beste Belehrung.

C) Werkzeuge, und Hülfsmittel zu Längen-, und Höhen-Messungen auf dem Felde.

12) Maßstäbe — prismatische Stäbe, von Tannen-, oder Buchenholz, 1 bis 2 Ruthen lang, 2 Zoll dick und breit. — Sie werden zu Horizontalmessungen gebraucht, und sind deshalb, ihrer Länge nach, in Decimalfuße, und an den Enden oft noch in Zolle derselben Art getheilt. Die Enden selbst sind mit Messingkappen umgeben, auf deren Mitte senkrechte Stifte, etwa 1 Zoll hoch, des Visirens wegen, stehn. — Um die Stäbe mehr gegen die zerstörende Einwir-

kung der naſſen Witterung zu ſchützen, überzieht man ſie wohl mit Oehlfarbe. — Zur Horizontalſtellung derſelben wendet man die Setzwage (7), oder die lange Libelle an (8); zu ihrer Auflegung eingerammte Pfähle, oder hölzerne, mit Stellſchrauben verſehene, Schemel oder Brücken. — Bei genauen Meſſungen bedient man ſich wenigſtens zweier Stäbe, die, um ſie nicht mit einander zu verwechſeln, von verſchiedener Färbung, etwa ſchwarz und weiß, genommen werden.

13) Meßkette — eine, aus einfüßigen Gliedern von Eiſendraht, und meſſingenen Zwiſchenringen zuſammengeſetzte Kette; meiſtens 5 Ruthen (50′. dc) lang, und ſo gearbeitet, daß die einzelnen Ruthen durch größere Zwiſchenringe getrennt ſind. Die beiden Endringe haben gewöhnlich eine Weite von 1½ Zoll, um zwei cylindriſche Stäbe (Kettenſtäbe) von gleicher Dicke aufnehmen zu können, vermittelſt deren die Kette getragen, und ausgeſpannt wird. Zu dieſem Behufe ſind die Kettenſtäbe etwa 4 Fuß lang, und am untern Ende mit einer eiſernen Einſatzſpitze, und einem darüber angebrachten Hacken, oder Sattel verſehen, auf welchem letztern der Kettenring ruht. — Die Richtigkeit der Kettenlänge prüft man am beſten dadurch: daß man eine, zuvor durch Meßſtäbe genau beſtimmte, Länge, von etwa 1000 Fußen, mit der Kette nachmißt, und das Reſultat der Kettenmeſſung mit dieſen 1000 Fußen vergleicht, woraus ſich dann leicht der Längenfehler der Kette ergiebt. — Beiſpiele nach beliebiger Wahl.

14) Meßſchnur — eine, aus Hanf oder Baſt beſtehende, Schnur, durch Knoten oder Querfäden in Ruthen und Fuße abgetheilt, um zu Längenmeſſungen benutzt werden zu können. — Dergleichen Meſſungen ſind jedoch, wegen der Dehnbarkeit ſolcher Schnüre höchſt unzuverläſſig, weshalb man, für genaue Meſſungen, ſie nur zur Richtbeſtimmung der Kettenzüge oder der Meßſtablegung gebraucht.

15) Nivellirlatten nebſt Zielſcheiben oder Viſirungstafeln — prismatiſche Stäbe, von Tannen-, Kiefern-, oder Buchenholz, zu Verticalmeſſungen beſtimmt, und deshalb der Länge nach in Fuße, Zolle, und Linien, Duodecimale, wegen §. 183. 4, getheilt. Um ſie vertical aufſtellen zu können, iſt am untern Ende ein eiſerner hohler Schuh angebracht, in welchen der Kopf eines, in den Erdboden ſenkrecht getriebenen, Pfahls hineinpaßt. — Die ganze Latte iſt mit

weißer Oehlfarbe überzogen, um die schwarzen Theilstriche desto besser zu versichtbaren. — Die zu den Nivellirlatten gehörigen Visirungstafeln bestehn aus Eisenblech, und sind entweder quadrat-, oder kreisförmig gestaltet. Das Ganze ist mit Lackfirniß überzogen, und die Vorderseite dergestalt in schwarze, und weiße Felder getheilt, daß dadurch die, durch den Mittelpunkt der Tafel gezogene, horizontale Halbirungslinie der vertical aufgestellten Fläche leicht aus der Ferne erkennbar ist. Bei den quadratförmigen Tafeln wählt man zu diesem Endzwecke gewöhnlich zwei weiße, und zwei schwarze; bei den kreisrunden vier weiße, und vier schwarze Felder, sämmtlich im Mittelpunkt der Tafel zusammenstoßend in der Art, daß je zwei gleichfarbige eine diametral-entgegengesetzte Lage erhalten. — Um eine solche Tafel mit der Nivellirlatte verbinden, und auf derselben, mittelst einer von oben herabreichenden Rollenschnur, höher oder tiefer stellen zu können, ist an der Hinterseite entweder ein die Latte umspannendes Blechband, oder ein senkrechter Eisenstift angebracht, der durch eine mittlere Spalte der Latte geschoben, und durch einen Querriegel festgehalten wird. — Weitere Erörterungen dieses Gegenstandes bleiben dem mündlichen Vortrage überlassen.

16) Schall — die Geschwindigkeit der Schallfortpflanzung bietet, wenn gleich kein zuverlässiges, doch ein sehr leichtes Hülfsmittel dar, räumliche Entfernungen durch einfache Rechnungen zu bestimmen. Zu diesem Endzwecke hat man, durch Anwendung von Secunden- und Tertien-Uhren, die Geschwindigkeit des Schalls für eine Zeitsecunde, bei verschiedenen Wärmegraden der Atmosphäre, auszumitteln gesucht, und die Resultate der Beobachtung tabellarisch zusammengestellt. Wir begnügen uns mit folgenden Anführungen, und bemerken dabei, daß die vordern Zahlen Wärmegrade nach der Reaumürschen Thermometerscale, die hintern Zahlen Pariser Fuß bezeichnen.

$0° = 1027'$; $5° = 1038{,}9'$; $10° = 1050{,}7'$; $15° = 1062'$.

$20° = 1074'$; $25° = 1085{,}5'$; $30° = 1096{,}9'$; $35° = 1108'$.

Vorstehende Tabelle giebt zu erkennen, daß sich die Geschwindigkeit des Schalls, für jeden einzelnen Wärmegrad nach Reaumüre, ungefähr um 2, 3 Pariser Fuß ändert, vorausgesetzt, daß eine ziemliche Windstille der Luft stattfindet. — Starke Gegenwinde verzögern diese Geschwindigkeit etwa um 16 Fuß, mittlere um 8, und schwache etwa um 4 Fuß.

17) Schritte, Augenmaß. — Sehr unzuverläſſige Mittel zu Längen-, und Höhen-Beſtimmungen. — Die Gleichförmigkeit der Schritte, und die Richtigkeit des Augenmaßes erwirbt, und erprobt man am beſten durch öfteres Abſchreiten, und Abſehn bekannter Entfernungen. — Auf einen ſogenannten Feldſchritt rechnet man gewöhnlich 2 Decimalfuße.

D) Werkzeuge zur Winkelbeſtimmung auf dem Felde.

18) Das Winkelkreuz — ein hölzernes rechtwinkliges Kreuz mit vier gleich langen Armen, in deren Endpunkten dünne ſenkrechte Eiſenſtifte in ſolcher Entfernung von des Kreuzes Mittelpunkt aufgerichtet ſind, daß ſie die Winkelſpitzen eines richtigen Quadrats, oder die Endpunkte zweier ſich rechtwinklig ſchneidenden Kreisdurchmeſſer bezeichnen, und dadurch Viſirungslinien von recht-, und halbrechtwinkliger Neigung zu einander verſinnbilden. Denn nennt man jede durch zwei gegenüberſtehende Stifte angedeutete Richtungslinie eine Haupt-Viſirungslinie, jede durch zwei andere Stifte angedeutete aber eine Neben-Viſirungslinie, ſo ergibt ſich aus dem Vorbemerkten leicht, daß die beiden Hauptviſirungslinien, am Mittelpunkte des Kreuzes, rechte Winkel; die Nebenviſirungslinien dagegen mit jeder Hauptviſirungslinie, am Eckpunkte des Kreuzes, halbe rechte Winkel erzeugen müſſen. — Man bedient ſich dieſes einfachen Inſtruments zur Beſtimmung der genannten Winkelarten auf dem Felde; indem man es, vermittelſt einer, am untern Mittelpunkte angebrachten, Hülſe auf den Zapfen eines ein-, oder dreibeinigen Stativs ſtellt. — Die Richtigkeit des Werkzeuges kann leicht auf dem Felde dadurch geprüft werden, daß man, nach den Richtungen der vier Schenkel, in den Verlängerungen der beiden Hauptviſirungslinien, vier ſenkrechte Stäbe (3) ausſteckt, ſodann das Kreuz bis zur Richtwechſelung beider Viſirungslinien dreht, und nachſieht, ob Deckung zwiſchen den Stiften und Stäben wie zuvor ſtattfindet.

19) Die Bouſſole — ein zur Gradmeſſung der Winkel, mittelſt der Magnetnadel, und eines in Gerade getheilten Kreisringes, beſtimmtes Werkzeug, deſſen nähere Einrichtung ſich am beſten bei unmittelbarer Anſchauung erklären läßt. — Damit die Grade, und deren Unterabtheilungen nicht zu klein ausfallen, macht man die im Mittelpunkt des Kreisringes, auf einem feinen Stifte, frei bewegliche Magnetnadel wenigſtens 3 bis 4 Zoll lang; und giebt ihr entweder eine

pfeil-, oder eine lanzen-, oder eine balkenförmige nur an den äußersten Enden zugespitzte Gestalt. Letztere ist den übrigen nach vielfachen Erfahrungen vorzuziehn. — Sowohl der metallene Kreisring, als das denselben umschließende Dosengehäuse müssen wegen bekannter Eigenschaft der Magnetnadel frei von Eisen seyn. — Haupterfordernisse für dieses Werkzeug sind: leichte Beweglichkeit der Nadel, und richtige Gradtheilung des Kreisringes; das Vorhandenseyn der erstern wird durch Annäherung von Eisen ꝛc., das der letztern durch Zirkelmessung, oder durch Drehung der Boussole erprobt, mit Beobachtung der Gradstriche, auf welche die entgegengesetzten Pole der Nadel treffen. — Gründe für den sehr eingeschränkten Gebrauch der Boussolen beim Aufnehmen der Felder, da nicht blos die Beschaffenheit des Bodens, sondern auch die Zeitdauer der Messungsoperation in Betracht kommt.

20) Das Astrolabium — die Hauptbestandtheile dieses Instruments sind: ein massiver Kreisring von Kupfer, dessen Peripherie in Grade und Viertelgrade getheilt, und zur beliebigen Ablesung dieser Grade, mit doppelten Gradzahlen versehn ist, so daß je zwei zusammengehörige 360 Grad betragen. — Ferner zwei im Mittelpunkt des graduirten Kreisringes (Limbus) angebrachte, und über den Limbus hinausragende, Diopterlineale (Alhidadenregeln), oder Fernröhre, zum Behuf des Visirens; von welchen das eine die Gradstriche 360°, und 180 schneidet, und fest ist, während das andere nach beliebigen Richtungen bewegt werden kann, und für Bewegungen, nach oben oder unten, mit der sogenannten Kippregel, zur Messung der Erhöhungs-, und Vertiefungswinkel (Elevations-, und Depressionswinkel), verbunden ist — endlich ein dreibeiniges Stativ mit einem drehbaren Nußzapfen, auf welcher die Mittelpunktshülse des Instruments, zur beliebigen Handhabung desselben, gesetzt wird. — Nähere Erörterungen über diesen Gegenstand bleiben den mündlichen Vorträgen überlassen. — Dem Durchmesser des Kreisrandes giebt man, den besten Vorschriften zu Folge, eine Länge von 6 Zollen, dem Limbus selbst die Breite von einem halben Zolle. — Um Winkel nach Minuten und Secunden, vermittelst dieses Instruments, zu messen, bedient man sich eines, am äußern Rande des Limbus, verschiebbaren Nonius, dessen nähere Beschreibung der mündlichen Erläuterung vorbehalten wird. — Die Richtigkeit des

Werkzeugs ist abhängig: von der richtigen Gradtheilung sowohl des Hauptrandes, als des Kippregelrandes; ferner von der senkrechten Stellung der Kippregel gegen die Ebene des Hauptrandes; und endlich von der Centricität der Diopterlineale, oder Fernröhre. — Von diesen Erfordernissen wird das erste am besten durch Zirkelmessung, das zweite durch eine allmälige Hinauf- oder Hinabvisirung an dem Faden eines in ziemlicher Entfernung aufgehängten Bleiloths, und das dritte durch genaues Beobachten der Limbusbogen, welche von verschiedenen Scheitelwinkeln beider Alhidaden begrenzt sind, erprobt. — Man bedient sich dieses Instruments um Winkel von beliebiger Lage auf dem Felde, nach Gradmaß, zu bestimmen — die meistens hierbei erforderliche Horizontalstellung des Hauptrandes bewirkt man durch lange, oder dosenförmige Libellen (8); die verticale Uebereinanderstellung des Instrumenten-Centrums und eines Erdenpunktes durch Anwendung des Bleiloths (6).

21) Der Meßtisch nebst Zubehör. — Die Hauptbestandtheile dieses Werkzeugs sind: ein aus Pappeln- oder Lindenholz glatt gearbeitetes, quadratförmiges Reißbrett, 1 bis 2 Fuß lang und breit, und ½ Zoll dick, an den Rändern mit eichenen Leisten versehn, um der Krümmung des Holzes vorzubeugen. — Ferner ein dreibeiniges Feldstativ mit einem drehbaren messingenen Nußzapfen, zur Aufnahme des Reißbrettes, mittelst einer, am untern Mittelpunkt desselben angebrachten Hülse bestimmt; welches Stativ auch zugleich zur Aufstellung des Astrolabiums benutzt werden kann (vergl. 20). — endlich zum Behuf der Linien- und Winkelvisirungen, eine, auf der Fläche des Tisches völlig bewegliche, Alhidadenregel, etwa 1 bis 1½ Zoll breit und 1½ Linien dick, von der Länge der Tischplatte (vergl. 20). — Man bedient sich dieses einfachen Apparats zur horizontalen Projectionsbestimmung beliebiger Feldfiguren (§. 178. 3.), wobei die Winkel in geometrischer Größe gefunden werden, die sich dann, für etwaige Rechnungszwecke, leicht nach §. 184. 3. Aufg. 1. im Gradmaß ausdrücken lassen. Bei verticaler Stellung des Tischblattes können auch Höhen- und Tiefenwinkel, vermittelst der Alhidade bestimmt werden. — Die Horizontalstellung des Reißbrettes bewirkt man entweder durch die Setzwage (7)., oder, mit mehr Genauigkeit, durch die dosenförmige Libelle (8).; die verticale Uebereinanderordnung beliebiger Tisch- und Feldpunkte durch die

sogenannte Einlothzange, ein gabelartiges Instrument, von solcher Schenkelöffnung, daß die Dicke der Meßtischplatte hineinpaßt, und von solcher Schenkellänge, daß ein, am Endpunkte des untern Schenkels befestigtes, und bis auf die Erde herabreichendes, Bleiloth an jeden Punkt des Tischblattes gebracht werden kann, um, vermittelst der Fadenrichtung die correspondirenden Feldpunkte erkennbar zu machen. — Ob die Visirspalten der Alhidadenregel senkrecht gegen die Ebene des Grundlineals stehen, erprobt man leicht durch Hinauf- oder Hinabvisiren an dem Faden eines fern aufgehängten Bleiloths, wobei freilich vorausgesetzt wird, daß die Fläche des Lineals in einer horizontalen Ebene liegt (vergleiche 20). — Andere hierher gehörige Erläuterungen bleiben dem mündlichen Vortrage überlassen.

NB. Daß ich bei Aufzählung der nöthigsten Werkzeuge zur Feldvermessung nur die vorstehenden genannt und kurz beschrieben habe, wird man, für den Endzweck dieses Anhangs, eher lobens-, als tadelnswerth finden. Lehrer, denen es nöthig scheint, ihre Schüler mit der Einrichtung und dem Gebrauche des Theodolit, oder einzelner Spiegelinstrumente vertraut zu machen, können ja leicht das hier Versäumte durch Dictate und mündlichen Vortrag ergänzen. Mißbilligung verdienten dergleichen Ergänzungen nur dann, wenn sie sich nicht auf unmittelbare Anschauung und wirkliche Vorzeigung der Instrumente gründeten, und dadurch gegen die alte, sehr beherzigungswerthe Regel: ne quid nimis verstießen.

186. Werkzeuge und Materialien zur Verzeichnung und Illumirung topographischer Plane; nebst Andeutungen über die Darstellungsweise mehrerer Feldgegenstände nach Form und Färbung.

A) Zur geometrischen Verzeichnung eines Planes bedient man sich der Reißzeug-Instrumente, von welchen die nöthigsten bereits auf dem Anfangsblatte des Werks genannt sind. Die Einrichtung, Zweckbestimmung, Richtigkeitsprüfung dieser Instrumente darf als bekannt vorausgesetzt werden, weshalb wir uns aller Erläuterungen in dieser Beziehung enthalten zu müssen glauben. Der Bequemlichkeit wegen pflegt man den Oben aufgezählten Werkzeugen noch folgende, deren nähere Beschreibung dem Lehrer überlassen bleibt, beizugesellen: — einen Federzirkel, zur Auf- und Abtragung gerader Linien — einen Halbirungszirkel, zur Halbirung gerader Linien, ohne Anwendung des §. 8. 1 und §. 140 — einen geradlinigen Nonius zur Ergänzung des tausendtheiligen Maßstabes,

um durch Verbindung beider kleine Linienstücke genauer zu messen, als es der Maßstab für sich allein gestattet — und endlich einen dreifüßigen Zirkel, zur Auf- und Abtragung der drei Winkelspitzen eines Dreiecks, ohne der Constructionsmethode in §. 17. 1 benöthigt zu sein.

B) Zur Illuminirung eines topographischen Risses bedient man sich folgender Farben: der schwarzen, der rothen, der blauen, der gelben, der grünen und der braunen. Nach Tob. Mayers praktischer Geometrie. Theil III. pag. 90—95. Göttingen 1818 wählt man:

1) Zur schwarzen Farbe — Chinesische Tusche, die sich von der unächten durch Zartheit des Kerns, durch leichtes und festes Ansetzen auf Papier, durch Goldglanz des Bruches, durch geringes Abnutzen beim Gebrauche, und durch Bisamgeruch unterscheidet.

2) Zur rothen Farbe — Carmin von brennendrother Farbe, mit Gummiwasser und Candiszucker, oder auch mit Citronensaft bis zur paßlichen Flüssigkeit angerieben.

3) Zur blauen Farbe — Berliner Blau in Gummiwasser zerrieben, und nach geschehener Abtrocknung in Tuschform zum fernern Gebrauche aufbewahrt. — Blaue Saftfarben sind, wegen ihrer Veränderlichkeit, nicht brauchbar.

4) Zur gelben Farbe — Gummigutti, oder gebranntes Schüttgelb, in der Art zubereitet wie die blaue Farbe aus Berliner Blau.

5) Zur grünen Farbe — Berliner Blau mit Gummigutti vermischt — oder grüne, aus destillirtem Grünspan bereitete, stark mit Wasser verdünnte, und mit etwas Saftgrün versetzte, Tinte. — Reines Saftgrün wird mit der Zeit gelblich.

6) Zur braunen Farbe — Carmin, Gummigutti und schwarze Tusche in gehöriger Vermischung — auch bedient man sich des Caffee-, und Nußschalen-Extractes.

Sämmtliche Farben werden kurz vor ihrem Gebrauche, in Glas-, oder Porzellan-Schälchen abgerieben, und vermittelst gut geleimter, feingespitzter, kurzer Haarpinsel aufs Papier übergetragen; wobei man grelle Illuminirungen zu vermeiden sucht, weil die Schönheit eines Risses nicht blos nach der Zartheit der Linien und Punkte, sondern auch nach der Bläße der Farben beurtheilt wird.

C) Die Illuminirung wird in topographischen Rissen hauptsächlich

angewendet, um gewiſſe Bodenbeſchaffenheiten des aufgenommenen Terrains zu charakteriſiren. In dieſer Beziehung pflegt man nachſtehende Bodenqualitäten auf folgende Arten zu färben (ſ. Tob. Mayers prakt. Geometr. Thl. III. pag. 101—6). Wieſen: grasgrün — Weideplätze: blaßgrün; die begraſten Stellen: punktirt; die mit Heidekraut bedeckten: braun beſtreift — Landſtrecken: blaßgelb, roth punktirt — Mohrgrund: dunkelgelb; die wäſſerigen Stellen: bläulich beſtreift — Gutes Weitzenfeld: roth; ſchlechtes: röthlich beſtreift. — Gutes Roggenfeld: braun; ſchlechtes: bräunlich beſtreift — Gutes Gartenland: blaßroth; mittelmäßiges: braun; ſchlechtes: gelb, in allen drei Fällen grün beſtreift — Eichengrund: blaßgelb; Buchengrund: bräunlich; Fichtengrund: blaßdunkelgrün; Grund für gemiſchte Holzarten: gemiſchte Beſtreifung nach den Charakterfarben der einzelnen Holzarten — Grenzen: roth punktirt; ſtärker, oder ſchwächer, jenachdem es Haupt-, oder Nebengrenzen ſind. — Wege: braun — Berge, und ſonſtige erhabene Gegenſtände: ſchwarz ſchattirt, mit Schattenwurf nach der rechten Seite; weil angenommen wird, daß die einfallenden Lichtſtrahlen den untern Rand der Zeichnung, von der linken, nordweſtlichen, Seite her, unter einem Winkel von 45° Graden treffen. — Flüſſe: blaßhellgrün mit ſchwarzen Uferſtrichen, und bläulichen, nach der Mitte zu ſchwächer werdenden, Linien, parallel der Uferbegrenzung.

D) Zur Bezeichnung einzelner, oft vorkömmlicher Feldgegenſtänden bedient man ſich in topographiſchen Riſſen gewiſſer charakteriſtiſcher Formen, die ſich theils, als Aehnlichkeitsbilder, von ſelbſt erklären, wie z. B. die Baum-, und Buſchwerks-Abbildungen, theils aber, als blos techniſche Symbole, einer Erläuterung bedürfen. Wir begnügen uns in letzterer Beziehung mit folgenden Angaben:

Fußſteige werden durch punktirte, Holzwege durch einzelne zuſammenhängende Linien bezeichnet; Feldwege durch zwei parallele Linien, von denen die eine punktirt iſt; Poſtſtraßen durch zwei parallele Linien; Landſtraßen durch Doppelpaare von parallelen Linien; Hohlwege durch einzelne Linien mit doppelter Seitenſchattirung. — Grenzſteine durch kleine Vierecke; Grenz-

hügel durch kleine Kreise — Gebäude durch Quadrat-, und Rechtecksformen, mit Beifügung eines Kreuzes, oder einer Fahne, ꝛc., um Kapellen, Kirchen, oder Gasthäuser, ꝛc., anzudeuten — hölzerne Jochbrücken wie bei aa in Fig. 109; hölzerne Zugbrücken wie bei bb; steinerne Bogenbrücken wie bei cc in Fig. 109. — Durchfuhrten wie bei dd. in Fig. 109. — Fähren wie bei ee in Fig. 109. — Schleusen wie bei ff. — Wassermühlen wie bei gg. in Fig. 109. — Windmühlen wie bei mm. in Fig. 110. — Weinberge wie bei ww. in Fig. 110. — Hopfenplätze wie bei hh. in Fig. 110.

NB. Vollständige Belehrung über diesen hier nur beiläufig berührten Gegenstand findet man, nach Tob. Mayers Anempfehlung, in folgenden Werken:

Anweisung zu praktisch-geometrischen Zeichnungen von Keferstein. Leipzig 1778.

Praktische Anweisung zum planimetrischen Vermessen der Feldmarken, und wie davon die Charten auszuarbeiten, zu berechnen und die Vermessungsregister einzurichten sind, von Hogreve. Hannover 1799.

Anweisung zum richtigen Erkennen und genauen Abbilden der Erdoberfläche in topographischen und Situations-Planen, von J. G. Lehmann. Dresden 1812.

§. 187. Zusammenstellung derjenigen trigonometrischen Dreiecksformeln, welche am häufigsten bei Feldvermessungen gebraucht werden. — Die Ableitungsformen werden als bekannt vorausgesetzt.

A) Formeln fürs rechtwinkelige Dreieck.

NB. In nachstehenden Formeln sind bezeichnet: die Hypotenuse durch a, die Katheten durch b, c; die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ, der Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch J.

a) Gegeben eine Seite und zwei, folglich auch der dritte Winkel.

1) Die Hypotenuse a und die drei Winkel α, β, γ. — Man findet:

$b = a \cdot \sin. \beta = a \cdot \cos. \gamma$ (1).

$c = a \cdot \sin. \gamma = a \cdot \cos. \beta$ (2).

$J = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin. \beta \cdot \sin. \gamma = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sin. 2\beta = \frac{1}{4}a^2 \cdot \sin. 2\gamma$ (3).

2) Eine Kathete, etwa b, und die drei Winkel α, β, γ. — Man findet:

$$a = \frac{b}{\sin.\beta} = \frac{b}{\cos.\gamma} \quad (4).$$

$$c = b \,.\, tg.\gamma = b \,.\, cotg.\beta \quad (5).$$

$$J = \tfrac{1}{2}bc = \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, tg.\gamma = \tfrac{1}{2}b^2 \,.\, cotg.\beta \quad (6).$$

b) Gegeben zwei Seiten und der rechte Winkel α.

3) Die Hypotenuse a, eine Kathete, etwa b, und der rechte Winkel α. — Man findet:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} \quad (7).$$

$$\sin.\beta = \cos.\gamma = \frac{b}{a} \quad (8).$$

$$J = \tfrac{1}{2}bc = \tfrac{1}{2}b \,.\, \sqrt{(a+b)(a-b)} \quad (9.)$$

4) Die beiden Katheten b, c, und der rechte Winkel α. — Man findet:

$$a = \sqrt{b^2+c^2} = b\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}} = b\sqrt{1+tg.^2\phi} = b \,.\, sec.\phi = \frac{b}{\cos.\phi} \quad (10).$$

$$tg.\beta = cotg.\gamma = \frac{b}{c} \quad (11). \qquad J = \tfrac{1}{2}bc \quad (12.)$$

B) Formeln fürs schiefwinkelige Dreieck.

NB. In nachstehenden Formeln sind bezeichnet: die drei Seiten durch a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ, und der Flächen-Inhalt des Dreiecks durch J.

a) Gegeben eine Seite und zwei, folglich auch der dritte Winkel des Dreiecks.

1) Die Seite a und die drei Winkel α, β, γ. — Man findet:

$$b = \frac{a \,.\, \sin.\beta}{\sin.\alpha} \quad (13).; \qquad c = \frac{a \,.\, \sin.\gamma}{\sin.\alpha} \quad (14).$$

$$J = \tfrac{1}{2}ab \,.\, \sin.\gamma = \tfrac{1}{2}ac \,.\, \sin.\beta = \frac{\tfrac{1}{2}a^{2}| \,.\, \sin.\beta \,.\, \sin.\gamma}{\sin.\alpha} \quad (15).$$

Für $\alpha = R$ entspringen hieraus die Formeln (1)., (2)., (3).

b) Gegeben zwei Seiten, und ein Winkel des Dreiecks.

2) Die Seiten a, b und der Zwischenwinkel α. — Man findet:

$$\sin.\beta = \frac{b}{a} \,.\, \sin.\alpha \quad (16).; \qquad \gamma = 2R - (\alpha + \beta).$$

$$c = \frac{b \,.\, \sin.\gamma}{\sin.\beta} \quad (17).; \qquad J = \tfrac{1}{2}ab \,.\, \sin.\gamma \quad (18).$$

Für $\alpha = R$ entspringen hieraus die Formeln (7)., (8)., (9).

3) Die Seiten b, c nnd der Zwischenwinkel α. — Man findet:

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos.\alpha}$, oder, weil $\cos.\alpha = 1 - 2 \,.\, \sin.^2\tfrac{1}{2}\alpha$ ist:

$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4bc \,.\, \sin.^2\tfrac{1}{2}\alpha}$, oder, wenn b — c herauszogen und

$\frac{2 \cdot \sin. \frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{bc}}{b-c} = \text{tg. } \phi$ gesetzt wird:

$a = (b-c)\sqrt{1+\text{tg.}^2\phi} = (b-c) \cdot \text{sec. } \phi = \frac{b-c}{\cos. \phi}$ (19).

$\sin. \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin. \alpha$ (20).; $\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$; $J = \frac{1}{2}bc \cdot \sin. \alpha$ (21).

Für $\alpha = R$ entspringen hieraus die Formeln (10)., (11)., (12.)

c) Gegeben die drei Seiten des Dreiecks.

α) Die Seiten a, b, c. — Man findet:

$\cos. \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos. \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos. \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; oder,

wenn man statt der cos. die sin. einführt, die Differenzen der entstehenden Quadrate in Factoren zerlegt, und der Abkürzung wegen die halbe Summe der drei Dreiecksseiten durch den Buchstaben s bezeichnet:

$\sin. \alpha = \frac{2}{bc} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b)\,(s-c)}$ (22).

$\sin. \beta = \frac{2}{ac} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ (23).

$\sin. \gamma = \frac{2}{ab} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ (24).; oder auch,

wenn statt der obigen cos. die sin. der halben Winkel eingeführt, und die daraus hervorgehenden Ausdrücke, wie zuvor, in Factoren zerlegt, und durch Reduction vereinfacht werden:

$\sin. \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$ (22′).

$\sin. \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}}$ (23′).

$\sin. \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}$ (24′).

$J = \frac{1}{2}ab \cdot \sin. \gamma = \sqrt{s \cdot (s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ (25).

NB. Der Ausdruck dieser 25 Formeln nach num. log. oder arc. log. darf mit Recht dem Leser überlassen bleiben (vergl. §. 184. 3. Aufg. 1. und Aufg. 2.)

Erſter Abſchnitt.

Horizontale Projectionsbeſtimmungen.

A) Beliebiger Linien und Winkel des Feldes.

§. 188. Poſtulat. Mündliche Belehrung über die weſentlichen Verfahrungsarten und Vorſichtsmaßregeln bei Anwendung:

1) der Abſteckwerkzeuge (§. 185. 1. 2. 3. 5. 6.) zur Richtbezeichnung verticaler Feldebenen oder gerader Ortslinien (§. 178.); ſowohl in flachen, als in bergigen Gegenden.

2) Der Längenmeßwerkzeuge (§. 185. 12. 13. 14. ꝛc.) zur horizontalen Projectionsbeſtimmung abgeſteckter Ortslinien; ſowohl auf ebenem, wie auf unebenem Felde.

3) Der Winkelmeßwerkzeuge (§. 185. 18. 19. 20. 21. ꝛc.) zur Projectionsbeſtimmung verſchiedener Ortswinkel; ſowohl in horizontalen, als in ſchiefgeneigten Ebenen.

§. 189. Aufg. (Fig. 111.) Auf einem Punkte o einer geraden Ortslinie $\alpha\beta$ eine ſenkrechte Ortsgerade $o\pi$ zu errichten.

Aufl. 1. Vermittelſt der Meßkette. — Miß auf $\alpha\beta$ vom Punkte o aus gleiche Stücke $o\gamma$, $o\gamma'$ ab (§. 188. 2.), kleiner als die halbe Kettenlänge. Befeſtige die Endpunkte der Kette in γ, γ', und ſpanne dieſelbe, durch Ergreifung ihres Mittelpunktes δ, dergeſtalt an, daß die Hälften $\delta\gamma$, $\delta\gamma'$ gerade Linien bilden; ſo wird δ der Richtpunkt der verlangten Senkrechten $o\pi$, wie dies leicht aus der Congruenz der Dreiecke $\delta o\gamma$, $\delta o\gamma'$ erhellt (vergl. §. 4. 1. Aufl. 1.).

Aufl. 2. Vermittelſt des Winkelkreuzes — der Bouſſole — des Aſtrolabiums — des Meßtiſches — Verfahrungsarten, welche ſo leicht in die Augen ſpringen, daß ſie keiner Erläuterung bedürfen (vergl. §. 4. 1. Aufl. 2.).

§. 190. Aufg. (Fig. 112. — 113.) Aus einem Punkte o, außerhalb einer geraden Ortslinie $\alpha\beta$, eine ſenkrechte Ortsgerade $o\pi$ auf dieſelbe zu fällen.

1) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich und ſichtbar iſt.

Aufl. 1. (Fig. 112.) Vermittelſt der Kette und der Abſteckſtäbe. — Wähle in $\alpha\beta$ zwei Punkte γ, δ von der Lage, daß der Eintreffpunkt π des geſuchten Perpendikels $o\pi$ zwiſchen ſie fällt; beſtimme ſodann die horizontalen Projectionen der Dreiecksſeiten $o\gamma = c$, $o\delta = d$, $\gamma\delta = p + q = s$ (§. 188. 1. 2.), ſo folgt, aus einem bekannten Satze der Geometrie: $d^2 = c^2 + s^2 - 2sp$, oder $c^2 = d^2 + s^2 - 2sq$, woraus ſich ergiebt:

$$p = \frac{c^2 + s^2 - d^2}{2s}, \text{ oder } q = \frac{d^2 + s^2 - c^2}{2s}, \text{ Werthe, deren jeder zur Ermeſſung des Punktes } \pi \text{ dienlich iſt (§. 182. 8.).}$$

NB. Läge der Punkt o ſehr nahe an $\alpha\beta$, ſo ließe ſich die Aufgabe auch nach §. 6. 2′. Aufl. 1. Aufl. 2. löſen, wobei dann die nöthigen Bogen mit der Meßkette, oder einer Schnur beſchrieben werden könnten.

Aufl. 2. (Fig. 112.) Vermittelſt des Winkelkreuzes. — Durch Verſetzen des Kreuzes innerhalb der Linie $\alpha\beta$, bis daß der Punkt π als Richtpunkt der rechtwinkeligen Viſirungslinie πo gefunden iſt (vergl. §. 6. 2′. Aufl. 3.)

Aufl. 3. (Fig. 112.) Vermittelſt der Bouſſole. — Stelle die Bouſſole auf einen Punkt μ der Geraden $\alpha\beta$; beſtimme, nach §. 188. 3., den Winkel ϕ, welchen die Richtung der Magnetnadel ns mit $\alpha\beta$ bildet; verſetze ſodann das Inſtrument in den Punkt o, und ſtecke von o aus die $o\pi$ von ſolcher Lage ab, daß der Winkel $n'o\pi = 90^0 - \phi$ wird; ſo iſt offenbar der Forderung Genüge geſchehen.

Aufl. 4. (Fig. 112.) Vermittelſt des Aſtrolabiums. — Wähle eine beliebige Viſirlinie von einem Punkte der $\alpha\beta$ auf o gerichtet, etwa γo; beſtimme, nach §. 188. 3., in γ den Neigungswinkel $\beta\gamma o$, und in o den dazu gehörigen Complementswinkel $\gamma o\pi = 90^0 - \beta\gamma o$, ſo wird $o\pi$ die verlangte Senkrechte, wie dies leicht aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $o\pi\gamma$ erhellt.

Aufl. 5. (Fig. 112.) Vermittelſt des Meßtiſches. — Wie in Aufl. 4., wobei die Winkel nicht unmittelbar in Gradmaß, ſondern in geometriſcher Größe gefunden werden.

2) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zwar zugänglich, aber unſichtbar iſt.

Aufl. 6. (Fig. 112.) Nach Aufl. 1. Aufl. 3. ohne Abänderung. — Nach Aufl. 4. Aufl. 5. mit der Abänderung, daß von o aus eine Gerade $o\gamma$ bis $\alpha\beta$ abgesteckt (§. 188. 1.), und Zwischenpunkte derselben bei Bestimmung der Winkel $\beta\gamma o$, $\gamma o\pi$ benutzt werden müßten, weil in γ weder der Punkt o, noch in o der Punkt γ sichtbar ist.

Aufl. 7. (Fig. 112.) Zuweilen ist es vortheilhaft, eine in einem, oder in mehreren Punkten gebrochene Gerade, von o aus auf $\alpha\beta$ hin, abzustecken, und die dadurch gebildeten Winkel in Betracht zu ziehen. Wäre z. B. die $o\varepsilon\eta$ die gebrochene Linie, so dürfte man für das bei π rechtwinkelige Viereck $o\varepsilon\eta\pi$ nur die Winkel $o\varepsilon\eta$, $\varepsilon\eta\alpha$ nach bekannter Methode (§. 188. 3. §. 184. 3.) bestimmen, um für $o\pi$ den Winkel $\varepsilon o\pi = 3R - o\varepsilon\eta - \varepsilon\eta\alpha$ zu finden.

3) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus unzugänglich, aber sichtbar ist.

Aufl. 8. (Fig. 113.) Vermittelst des Winkelkreuzes und der Absteckstäbe, durch Anwendung des Satzes: »die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.« — Bestimme nach §. 188. 1. vom Punkte o aus nach zwei Punkten der $\alpha\beta$ zwei Richtungslinien, so daß der Zwischenwinkel bei o ein schiefer wird, wie in Fig. 113. der Winkel $\alpha o\beta > R$. Suche in der Richtungslinie $o\alpha$, nach Aufl. 2., den Punkt δ, und in der Richtungslinie $o\beta$ den Punkt γ von solcher Lage, daß die Winkel $\alpha\delta\beta$, $\alpha\gamma\beta$ rechte werden; und vollende, vermittelst der Richtpunkte γ, δ, das Dreieck $\alpha\beta o'$, so bildet offenbar der Punkt o' den Bestimmungspunkt für die verlangte Senkrechte $o\pi$.

NB. Wäre nicht der Punkt o, sondern der Punkt o' als Fällungspunkt der Senkrechten $o'\pi$ gegeben worden, so daß der Winkel $\alpha o'\beta$ ein spitzer wäre, so würde das Verfahren im Wesentlichen dasselbe bleiben, indem man auf $o'\alpha$ den Punkt γ, auf $o'\beta$ den Punkt δ nach obiger Bedingung bestimmte, und dann den Punkt o als Durchschnittspunkt der Höhen $\alpha\delta$, $\beta\gamma$ aufsuchte ꝛc.

§. 191. Aufg. (Fig. 112. 113.) Durch einen Punkt o eine gerade Ortslinie $\varrho\sigma$, parallel der $\alpha\beta$, zu legen.

1) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich und sichtbar ist.

Aufl. 1. (Fig. 112.) Vermittelst der Meßkette, und der Absteckstäbe. Wähle einen Punkt $\varkappa$, von $\alpha\beta$ weiter entfernt als o, und führe aus $\varkappa$ zwei Gerade $\varkappa\gamma$, $\varkappa\lambda$ auf die Richtung der $\alpha\beta$, so daß eine derselben den Punkt o schneidet. Bestimme die horizontalen Projectionen von $\varkappa\gamma = k$, $\varkappa o = k'$, $\varkappa\lambda = l$, bezeichne den Durchschnittspunkt der $\varkappa\lambda$ mit der gesuchten Parallelen $\varrho\sigma$ durch ν, die Entfer-

nung $\kappa\nu$ durch l', ſo ergiebt ſich dieſes l' aus folgender Proportion: $k : k' = l : l'$, alſo $l' = \frac{k'l}{k}$.

Aufl. 2. (Fig. 112.) Vermittelſt des Winkelkreuzes und der Abſteckſtäbe. Suche für die Senkrechte $o\pi$ den Punkt π in $\alpha\beta$, vermittelſt des Kreuzes, und lege durch o die Gerade $\varrho\sigma$, rechtwinkelig gegen $o\pi$ geneigt (§. 190. Aufl. 2. §. 189. Aufl. 2.).

Aufl. 3. (Fig. 112.) Vermittelſt der Bouſſole und der Abſteckſtäbe. Verfahre wie in §. 190. Aufl. 3., mit der Abänderung, daß hier der Winkel Φ am Punkte o abgetragen wird.

Aufl. 4. (Fig. 112.) Vermittelſt der Abſteckſtäbe und des Aſtrolabiums, oder des Meßtiſches.

Verfahre wie in §. 190. Aufl. 4., mit dem Unterſchiede, daß hier der Winkel $\beta\gamma o$ am Punkte o, als innerer Wechſelwinkel, $\gamma o\varrho = \beta\gamma o$, abgetragen wird.

2) Wenn die Linie $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zugänglich, aber nicht ſichtbar iſt.

Aufl. 5. (Fig. 112.) Nach Aufl. 1. 3. 4. ohne weſentliche Abänderung.

Aufl. 6. (Fig. 112.) Nach §. 190. Aufl. 7. mit dem Unterſchiede, daß hier nicht der Winkel $\varepsilon o\pi$, ſondern ſein Complement $\varepsilon o\sigma = 90^0 - \varepsilon o\pi$ am Punkte o beſtimmt wird.

Aufl. 7. (Fig. 112.) Durch Benutzung weit entfernter Objecte, welche in der Richtung der $\alpha\beta$ liegen und vom Punkte o aus geſehen werden können.

3) Wenn die Linien $\alpha\beta$ vom Punkte o aus zwar nicht zugänglich, aber doch ſichtbar iſt.

Aufl. 8. (Fig. 113.) Vermittelſt des Winkelkreuzes und der Abſteckſtäbe. Beſtimme nach §. 190. Aufl. 8. die Senkrechte $\pi oo'$ und lege, unter rechtwinkeliger Neigung gegen oo', entweder durch o die Gerade $\varrho\sigma$, oder durch o' die Gerade $\varrho'\sigma'$ (§. 189. Aufl. 2.), ſo iſt offenbar der Forderung, es mag o oder o' als Richtpunkt der Parallelen gegeben ſeyn, der Forderung Genüge geſchehen.

NB. Eine andere Löſung dieſes Falles kann auch nach §. 192. Aufl. 10. a. ausgeführt werden.

§. 192. Aufg. (Fig. 114. — 121.) Die, wegen mancherlei Hinderniſſe nicht unmittelbar auszumeſſende, horizontale Entfernung $\alpha\beta$ der Ortspunkte α, β, durch mittelbare Meſſungen zu beſtimmen.

1) Wenn von beiden Ortspunkten α, β nach gewiſſen Seitenpunkten hin gerade Ortslinien abgeſteckt, und gemeſſen werden können.

Aufl. 1. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette und der Absteckstäbe. Stecke aus α und β zwei gerade Ortslinien ab, die sich in einem Punkte γ schneiden; verlängere dieselben über γ hinaus, und mache auf diesen Verlängerungen von γ aus $\gamma\alpha' = \gamma\alpha$, $\gamma\beta' = \gamma\beta$, so wird offenbar das Dreieck $\alpha'\gamma\beta'$ congruent dem Dreiecke $\alpha\gamma\beta$, also auch $\alpha'\beta' = \alpha\beta$.

Trüge man nicht $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, sondern die $\frac{m}{n}$ Größe derselben von γ aus auf den Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ab, etwa $\gamma\delta = \frac{m}{n}.\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon = \frac{m}{n}.\beta\gamma$, oder $\gamma\delta' = \frac{m}{n}.\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon' = \frac{m}{n}.\beta\gamma$, und bestimmte die Verbindungslinien $\delta\varepsilon$, $\delta'\varepsilon'$, so würde man, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $\gamma\delta\varepsilon$, $\gamma\delta'\varepsilon'$, $\gamma\alpha\beta$, erhalten $\delta\varepsilon = \delta'\varepsilon' = \frac{m}{n}.\alpha\beta$.

Aufl. 2. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Winkelkreuzes.

Errichte, vermittelst des Kreuzes, in α und β die Senkrechten $\alpha\sigma$, $\beta\tau$; miß auf diesen Senkrechten, von α und β aus, gleiche Stücke $\alpha\alpha'' = \beta\beta''$ ab, und bestimme die horizontale Projection der $\alpha''\beta'' = \alpha\beta$ (§. 188. 2.), so wird dadurch offenbar der Forderung Genüge geleistet.

Aufl. 3. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Astrolabiums, oder der Bousſole.

Bestimme die horizontalen Projectionen der Ortsgeraden $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, und die des Winkels $\alpha\gamma\beta$ (§. 188. 1. 2. 3.), und berechne nach §. 187. Formel (19). die Projection der dritten Dreiecksseite $\alpha\beta$. Wären α und β von einander sichtbar, so könnte man auch die Projectionen der Seite $\gamma\alpha$ und der Winkel $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\beta$ bestimmen, und die Seite $\alpha\beta$ nach §. 187. Formel (13). berechnen.

Aufl 4. (Fig. 114.) Vermittelst des Meßtisches, der Meßkette und des verjüngten Maßstabes.

Verfahre wie in Aufl. 3., wobei hier das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, also auch die Seite $\alpha\beta$ in verjüngter Zeichnung gefunden wird.

2) Wenn nur von einem Ortspunkte, etwa α, und einem Zwischen- oder Verlängerungspunkte $\varkappa$ der $\alpha\beta$, nach gewissen Seitenpunkten hin gerade Ortslinien abgesteckt, und gemessen werden können; der zweite Ortspunkt β aber von diesen Seitenpunkten aus sichtbar ist.

Aufl. 5. (Fig. 115.) Vermittelst der Meßkette und der Absteckstäbe. Bestimme nach Aufl. 1. entweder $\alpha'x' = \alpha x$, oder $\delta\lambda = \frac{m}{n} \cdot \alpha x$, oder $\delta'\lambda' = \frac{m}{n} \cdot \alpha x$ und suche im ersten Falle in der Verlängerung der $\alpha'x'$ den Punkt β', im zweiten in der Verlängerung der $\delta\lambda$ den Punkt ε, im dritten in der Verlängerung der $\delta'\lambda'$ den Punkt ε', jedesmal von solcher Lage, daß β', ε, ε' in die durch β und γ angedeutete Visirungslinie $\beta\gamma$ fallen; so ergiebt sich offenbar aus den theils congruenten, theils ähnlichen Dreiecken $\gamma\alpha\beta$, $\gamma\alpha'\beta'$; $\gamma\delta\varepsilon$, $\gamma\delta'\varepsilon'$, die $\alpha'\beta' = \alpha\beta$, und die $\delta\varepsilon = \delta'\varepsilon' = \frac{m}{n} \cdot \alpha\beta$.

NB. Das Verfahren bleibt ohne wesentliche Abänderung, wenn auch der Punkt x in der Verlängerung der $\alpha\beta$, also in Fig. 115. links von α gewählt wird.

Aufl. 6. (Fig. 116.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Winkelkreuzes.

a) Errichte in α, vermittelst des Winkelkreuzes, die Senkrechte $\alpha\sigma$, und bestimme in dieser, mit demselben Werkzeuge, einen Punkt β' von solcher Lage, daß der Winkel $\alpha\beta'\beta = 45^0$ wird (vergl. §. 185. 18.), so entsteht offenbar $\alpha\beta' = \alpha\beta$.

b) Errichte in α die Senkrechte $\alpha\sigma$ wie vorher. Lege durch einen willkührlichen Punkt ε derselben die Gerade $\varepsilon\gamma$ rechtwinkelig gegen $\alpha\sigma$; bestimme in $\alpha\varepsilon$ den Durchschnittspunkt δ der durch γ und β bestimmten Visirungslinie $\gamma\beta$; miß $\alpha\delta = d$, $\delta\varepsilon = e$, $\varepsilon\gamma = c$, und setze $\alpha\beta = a$; so ergiebt sich dieses a aus folgender Proportion: $e : c = d : a$, also $a = \frac{cd}{e}$.

c) Errichte in α die Senkrechte $\alpha\sigma$ wie zuvor; in irgend einem Zwischen- oder Verlängerungspunkte x der $\alpha\beta$ die Senkrechte $x\tau$. Wähle in $\alpha\sigma$ einen beliebigen Visirungspunkt δ für die Gerade $\delta\beta$, und suche in $x\tau$ den Durchschnittspunkt λ dieser Visirungslinie $\delta\beta$; miß die Geraden $\alpha\delta = d$, $\alpha x = k$, $x\lambda = l$, setze $\alpha\beta = a$, so ergiebt sich dieses a aus folgender Proportion: $d : l = a : (a - k)$, also $a = \frac{dk}{d - l}$, oder wenn der Punkt in der Verlängerung der $\beta\alpha$ gewählt wäre, wodurch dann k negativ und $d < l$ würde, $a = \frac{dk}{l - d}$.

d) Errichte in einem Zwischenpunkte x der $\alpha\beta$ die Senkrechte $x\tau$; suche in dieser, vermittelst des Kreuzes, einen Punkt σ von der Lage, daß die Visirungslinien $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$ einen rechten Winkel bilden. Miß

entweder $\alpha x = k$, und $\alpha o = o$, oder $\alpha x = k$ und $xo = m$, so ergiebt sich $a = \alpha\beta$ leicht aus folgenden leicht begreiflichen Gleichungen: $a = \frac{o^2}{k}$, oder $a = \frac{m^2}{k} + k$.

Aufl. 7. (Fig. 115.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Astrolabiums.

Bestimme die horizontalen Projectionen der Geraden $\alpha\gamma$, der Winkel $\beta x\gamma$, $\alpha\gamma\beta$ (§. 188. 2. 3.), und berechne aus den gefundenen Resultaten die Gerade $\alpha\beta$ nach §. 187. Formel (13).

Aufl. 8. (Fig. 115.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Meßtisches.

Verfahre wie in Aufl. 7., wobei hier das Dreieck $\alpha\beta\gamma$, also auch die Gerade $\alpha\beta$ in verjüngter Zeichnung gefunden wird.

3) Wenn beide Ortspunkte α, β unzugänglich, aber von Seitenpunkten aus sichtbar sind.

Aufl. 9. (Fig. 117.) Vermittelst der Meßkette, und der Absteckstäbe. Lege durch einen Seitenpunkt der $\alpha\beta$, etwa durch γ, eine der $\alpha\beta$ so ziemlich gleichlaufende Ortsgerade $o\gamma o'$. Miß auf dieser von γ aus gleiche Stücke $\gamma\delta = \gamma\delta'$ ab. Wähle in der Visirungslinie $\delta\alpha$ einen zugänglichen Punkt ε, in der Visirungslinie $\delta'\beta$ einen zugänglichen Punkt η; bestimme die Geraden $\gamma\varepsilon$, $\gamma\eta$, und trage jede, von γ aus, auf ihrer Rückverlängerung ab, nämlich auf $\gamma\lambda$ die $\gamma\varepsilon' = \gamma\varepsilon$, auf $\gamma\nu$ die $\gamma\eta' = \gamma\eta$; wodurch offenbar die beiden Richtungslinien $\delta\phi$, $\delta'\phi'$ von solcher Lage gefunden sind, daß sie von den Rückverlängerungen der Visirungslinien $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ in zwei Punkten α', β' geschnitten werden, deren Abstand $\alpha'\beta' = \alpha\beta$ seyn muß, wie dies leicht aus der Congruenz der Dreiecke: $-\delta\gamma\varepsilon$, $\delta'\gamma\varepsilon' - \delta'\gamma\eta$, $\delta\gamma\eta' - \delta\gamma\alpha$, $\delta'\gamma\alpha' - \delta'\gamma\beta$, $\delta\gamma\beta'$ erhellt.

Aufl. 10. (Fig. 113. 118. — 120.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe, und des Winkelkreuzes.

a) (Fig. 113.) Bestimme nach §. 190. Aufl. 8. die rechten Winkel $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\delta\beta$: miß die Gerade $\gamma\delta = d$, und den Winkel $\gamma o\alpha$, wodurch offenbar auch der Complementswinkel $o\alpha\gamma = 90^0 - \gamma o\alpha = \phi$ gefunden ist. Nach bekannten Sätzen der Geometrie bildet, der Construction zufolge, $\alpha\beta = a$ den Durchmesser, $\gamma\delta = d$ eine Sehne, und $o\alpha\gamma = \phi$ den zugehörigen Peripheriewinkel eines durch die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ gelegten Kreises, woraus sich ergiebt: $a \cdot \sin. \phi = d$, also $a = \frac{d}{\sin. \phi}$.

b) (Fig. 118.) Wähle seitwärts von $\alpha\beta$ einen Standpunkt γ, und bestimme vermittelst des Kreuzes die beiden Richtungslinien $\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon$, erstere rechtwinkelig gegen $\gamma\alpha$, letztere rechtwinkelig gegen $\gamma\beta$ geneigt, wodurch offenbar der Winkel $\delta\gamma\varepsilon$ gleich wird dem Winkel $\alpha\gamma\beta$. Um die Längen von $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ auf $\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon$ zu erhalten, suche in $\gamma\delta$ den Punkt α', in $\gamma\varepsilon$ den Punkt β' von der Lage, daß sowohl der Winkel $\gamma\alpha'\alpha$, wie der Winkel $\gamma\beta'\beta = 45^0$ wird, so entsteht offenbar $\gamma\alpha' = \gamma\alpha$, $\gamma\beta' = \gamma\beta$, also auch $\alpha'\beta' = \alpha\beta$.

NB. Die Linie $\alpha'\beta'$ hat gegen $\alpha\beta$ eine senkrechte Lage, weshalb man sich auch dieser Construktionsmethode zur Lösung der Aufgaben in §. 190. 3. und in §. 191. 3. bedienen könnte.

c) (Fig. 119.) Wähle seitwärts von $\alpha\beta$ eine gerade Standlinie $\Phi\Psi$, und bestimme auf dieser vermittelst des Kreuzes: 1) die auf $\Phi\Psi$ senkrecht stehenden Visirlinien $\gamma\alpha$, $\delta\beta$. 2) Die unter 45 Graden gegen $\Phi\Psi$ geneigten Richtungslinien $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$; so ergiebt sich offenbar $\gamma\alpha' = \gamma\alpha = c$, $\delta\beta' = \delta\beta = d$, und, wenn $\alpha\beta = a$ gesetzt, $\gamma\delta = b$ bestimmt wird, $a = \sqrt{b^2 + (c - d)^2}$, welche Formel leicht in ihrer Richtigkeit erkannt werden kann.

d) (Fig. 120.) Wenn ein Zwischenpunkt π der $\alpha\beta$ zugänglich ist. — Errichte in π die Senkrechte $\pi\sigma$, und suche, vermittelst des Kreuzes, in $\pi\sigma$ die Punkte α', β' von der Lage, daß die Winkel $\pi\alpha'\alpha$, $\pi\beta'\beta = 45^0$ werden, so entsteht offenbar $\pi\alpha' = \pi\alpha$, $\pi\beta' = \pi\beta$, also $\alpha\beta = \pi\alpha' + \pi\beta'$.

Aufl. 11. (Fig. 121.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Astrolabiums, oder der Bouſſole.

Wähle seitwärts von $\alpha\beta$ eine ihr so viel wie möglich gleichgerichtete Standlinie $\gamma\delta$; miß am Punkte γ die Winkel $\varkappa$, λ, am Punkte δ die Winkel μ, ν, nebst der Seite $\gamma\delta$; und berechne 1) aus der Seite $\gamma\delta$ und den Winkeln μ, $(\varkappa + \lambda)$ die Seiten $\gamma\alpha$, $\delta\alpha$; ferner aus der Seite $\gamma\delta$ und den Winkeln λ, $(\mu + \nu)$ die Seiten $\gamma\beta$, $\delta\beta$ nach §. 187. Formel (13)., (14). — 2) Aus den Seiten $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ und dem Winkel $\varkappa$; oder auch aus den Seiten $\delta\alpha$, $\delta\beta$ und dem Winkel ν die gesuchte Seite $\alpha\beta$ nach §. 187. Formel (19).

Aufl. 12. (Fig. 121.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Meßtisches.

Wähle, wie in Aufl. 11., eine gerade Standlinie $\gamma\delta$; stelle einen paßlichen Meßtischpunkt γ' vertical über den Feldpunkt γ (§. 185. 21.),

und ziehe aus γ', um die horizontalen Projectionen der Winkel $\varkappa$, λ zu erhalten, die Meßtiſchlinien $\gamma'\varepsilon$, $\gamma'\eta$, $\gamma'\vartheta$, gerichtet auf α, β, δ. Miß $\gamma\delta$, und trage ſie im Verjüngungsmaße (§. 183.) als $\gamma'\delta'$ auf $\gamma\vartheta$ ab. Setze ferner den Meßtiſchpunkt δ' vertical über den Feldpunkt δ, ſo daß $\delta'\gamma'$ in die Richtung der $\delta\gamma$ zu liegen kommt; ziehe aus δ' die Meßtiſchlinien $\delta'\varrho$, $\delta'\sigma$, gerichtet auf α, β; ſo wird erſtere die $\gamma'\varepsilon$ im Punkte α', letztere die $\gamma'\eta$ im Punkte β' dergeſtalt ſchneiden, daß das Viereck $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ähnlich wird dem Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$; und die Maßverjüngung der $\alpha'\beta'$ entſpricht dem Grundmaße der $\alpha\beta$, wie dies leicht erhellt.

Damit die Durchſchnittspunkte α', β' der Geraden $\gamma'\varepsilon$, $\delta'\varrho$; $\gamma'\eta$, $\delta'\sigma$ innerhalb der Meßtiſchplatte fallen, muß die für $\gamma\delta$ zu wählende Maßverjüngung $\gamma'\delta'$ mit Rückſicht auf die Größe des Meßtiſches und der aufzunehmenden Feldfigur $\gamma\delta\alpha\beta$, nach §. 183. 3. beſtimmt werden.

§. 193. **Aufg.** (Fig. 122. 123.) Krumme, oder gemiſchte Ortslinien, von unregelmäßiger Form, wie Wege, Grenzen, Flußufer ꝛc. durch mittelbare Meſſung zu beſtimmen.

Aufl. 1. (Fig. 122.) Vermittelſt der Coordinaten-Methode.

Es ſey $\alpha\beta$ die zu beſtimmende Ortslinie. Wähle eine gerade Standlinie (Abſciſſenaxe) oo', der $\alpha\beta$ ſo nahe wie möglich. Fälle aus ſämmtlichen Hauptkrümmungspunkten der $\alpha\beta$ Senkrechte auf die Abſciſſenaxe (§. 190.), etwa $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ etc.; miß dieſe Senkrechten (Ordinaten), ſo wie auch die dazu gehörigen Abſchnitte auf der Abſciſſenaxe (Abſciſſen) $o\alpha'$, $o\gamma'$, $o\delta'$, $o\varepsilon'$ etc. (§. 188. 2.); ordne die entſprechenden Abſciſſen und Ordinaten (Coordinaten) tabellariſch nebeneinander, letztere mit (+) oder (−) Bezeichnung, jenachdem ſie oberhalb oder unterhalb der Abſciſſenaxe liegen; und füge in einer dritten Columne diejenige Form der $\alpha\beta$ bei, welche zwiſchen je zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten ſtatt findet (z. B. vermittelſt der leicht verſtändlichen Zeichen $\smile$, $\frown$, —); ſo ſind offenbar alle Beſtimmungs-Elemente der krummen oder gemiſchten Ortslinie aus ſolcher Tabelle erſichtlich, und können ohne Schwierigkeit nach §. 183. zur bildlichen Verzeichnung derſelben für beliebige Maßverjüngung benutzt werden.

NB. Wählt man ſtatt einer Abſciſſenaxe zwei oder mehrere, ſo muß die gegenſeitige Lage derſelben nach §. 188. 3. beſtimmt werden. — Statt rechtwinkeliger Coordinaten könnte man ſich auch ſchiefwinkliger bedienen, in welchem

Falle der constante Coordinatenwinkel nach §. 188. 3. zu bestimmen wäre. Ueber die oft zweckmäßige Anwendung der sogenannten Polarordinaten die nöthigen Erläuterungen mündlich.

Aufl. 2. (Fig. 123). Vermittelst der Standlinien-Methode. Wähle eine gerade Standlinie, oder, wenn es nöthig wäre, mehrere von bestimmter Lage gegeneinander (§. 188. 3.), der Ortslinie $\alpha\beta$ so nahe wie möglich; und bestimme die Hauptkrümmungspunkte der letztern durch Dreiecke, deren Grundlinien innerhalb der Standlinien fallen, der Art, daß die diesen Grundlinien anliegenden Winkel entweder vermittelst der Bousſole, des Astrolabiums gemessen, und nach §. 187. Formel (13)., (14). in Rechnung gebracht, oder vermittelst des Meßtisches geometrisch aufgenommen, und so unmittelbar zur Verjüngungs-Construction der Ortslinie benutzt werden (§. 183. 4.) In Fig. 123. würde man, dieser Angabe gemäß, die Krümmungspunkte α, γ, δ, ε, η, ϑ, β der $\alpha\beta$ durch die Dreiecke: $\alpha'\alpha\gamma'$, $\gamma'\gamma\delta'$, $\gamma'\delta\delta'$, $\delta'\varepsilon o'$, $o'\eta\eta'$, $\eta'\vartheta\vartheta'$, $\vartheta'\beta\beta'$ bestimmen, und der bessern Winkelmessung wegen die Grundlinien $\alpha'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta' o'$, $o'\eta'$, $\eta'\vartheta'$, $\vartheta'\beta'$ auf den Standlinien oo', $o'o''$ so wählen, daß die denselben anliegenden Dreieckswinkel weder zu spitz, noch zu stumpf ausfielen.

Aufl. 3. Durch Anwendung beider vorbeschriebenen Methoden, jenachdem die eine oder die andere vortheilhafter ist. Der Triangulirungsmethode pflegt man sich nur dann zu bedienen, wenn die Krümmungspunkte der zu bestimmenden Ortslinien unzugänglich sind.

§. 194. Aufg. (Fig. 124.) Ortswinkel, wie $\beta\alpha\gamma = \alpha$, deren Scheitel die Aufstellung eines Winkelmessers nicht gestattet, durch mittelbare Messung zu bestimmen (zu centriren).

Aufl. 1. (Fig. 124.) Wähle in den Schenkeln des Winkels α, oder in deren Rückverlängerungen zwei von einander sichtbare Punkte ϕ, ψ, und bestimme die Winkel $\alpha\phi\psi = \phi$, $\alpha\psi\phi = \psi$ (§. 188. 3.), so entspringt der Winkel α offenbar aus folgender Gleichung: $\alpha = 180^0 - \phi - \psi$.

Aufl. 2. (Fig. 124.) Wähle innerhalb oder außerhalb der Schenkel des Winkels α einen Punkt; fälle von diesem auf die Richtungen der Schenkel Senkrechte (§. 190.), und miß den Winkel, welchen die Senkrechten mit einander bilden, er sey $= \delta$; so ergiebt sich leicht, daß bei der erstern Wahl des Punktes der Winkel $\alpha = 180^0 - \delta$, bei der letztern aber $\alpha = \delta$ seyn müsse.

Aufl. 3. (Fig. 124.) Wähle in der Nähe des Scheitels α einen zweiten Punkt, etwa α', und bestimme die Winkel $\beta\alpha'\gamma = \alpha'$, $\alpha\beta\alpha' = \beta'$, $\alpha\gamma\alpha' = \gamma'$, so folgt leicht, nach einem bekannten Dreieckſatze, vermittelſt einer durch α, α' gelegten Hülfslinie, die Gleichung $\alpha = \alpha' + \beta' + \gamma'$.

Die Winkel β', γ' können, jenachdem es die Umſtände zulaſſen, auf mehrfache Art beſtimmt werden.

1) Stelle das Aſtrolabium oder die Bouſſole etc. in β und γ auf, und miß die verlangten Winkel nach §. 188. 3.

2) Beſtimme die Projection der Geraden $\alpha\alpha' = a'$, ſo wie die der Winkel $\alpha\alpha'\beta$, $\alpha\alpha'\gamma$, und berechne die Winkel β', γ' nach §. 187. Formel (20).

3) Fälle aus dem gewählten Punkte α' auf die Richtungen der Schenkel des Winkels α Senkrechte $\alpha'\pi$, $\alpha'\varkappa$ (§. 190.); beſtimme dann die Projectionen der Geraden $\alpha'\pi = p$, $\alpha'\varkappa = q$, $\alpha'\beta = b'$, $\alpha'\gamma = c'$ genau oder näherungsweiſe (§. 188. 2. §. 185. 16. 17. §. 192.), ſo ergiebt ſich vermittelſt dieſer Reſultate nach §. 184.:

$\sin.\beta' = \frac{p}{b'}$, $\sin.\gamma' = \frac{q}{c'}$, folglich:

$\beta' = \text{arc. (log. sin. } \beta' = \log. p - \log. b')$, und

$\gamma' = \text{arc. (log. sin. } \gamma' = \log. q - \log. c')$.

Was die Lage des zu wählenden Nebenpunktes betrifft, ſo kann derſelbe angenommen werden:

a) in der Scheitelfläche des Winkels α, wie α';
b) in der Fläche des Winkels α ſelbſt, wie α'';
c) in einer Nebenfläche des Winkels α, wie α''';
d) in einer Schenkelverlängerung des Winkels α, wie α^{IV};
e) in einem Schenkel des Winkels α ſelbſt, wie α^{V}.

In allen dieſen Fällen bleiben in der Grundgleichung für α die Nebenpunktswinkel α', α'', α''' etc. ſtets poſitiv, während die an β, γ liegenden Endpunktswinkel β', γ'; β'', γ'' etc. poſitiv, oder negativ, oder gleich Null werden, jenachdem die zugehörigen auf die Nebenpunkte gerichteten Schenkel außerhalb oder innerhalb des auf den Grundſcheitel gerichteten Schenkels $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$, oder deckend auf denſelben fallen. Es ergiebt ſich alſo:

für die Lage a) die Gleichung $\alpha = \alpha' + \beta' + \gamma'$ als Normalfall;
für die Lage b) die Gleichung $\alpha = \alpha'' - \beta'' - \gamma''$;

für die Lage c) die Gleichung $\alpha = \alpha''' + \beta''' - \gamma'''$;
für die Lage d) die Gleichung $\alpha = \alpha^{IV} + \gamma^{IV}$;
für die Lage e) die Gleichung $\alpha = \alpha^{V} - \beta^{V}$.

Die obigen Bestimmungsmethoden dieser verschiedenen Endpunktswinkel erleiden keine wesentliche Veränderung.

B) Beliebiger Flächen des Feldes.

a) Form-Bestimmung derselben.

§. 195. Aufg. (Fig. 114. — 26.) Die horizontale Projection eines beliebigen Ortsdreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch unmittelbare oder mittelbare Messung zu bestimmen, jenachdem das Eine oder das Andere ausführbar ist.

1) Wenn sämmtliche Seiten und Winkel des Dreiecks zugänglich und meßbar sind.

Aufl. 1. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette und der Absteckstäbe. Miß die drei Seiten des Dreiecks (§. 188. 1. 2.), und construire die Verjüngung desselben nach §. 183. §. 17. 1.

Aufl. 2. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Winkelkreuzes.

Bestimme eine Höhe und die zugehörigen Seitenabschnitte des Dreiecks (§. 191. §. 188. 1. 2.), und aus dieser mittelst Anwendung des Pyth. Lehrsatzes die beiden übrigen Seiten etc.

2) Wenn nur zwei Seiten des Dreiecks und der Zwischenwinkel meßbar sind.

Aufl. 3. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette und der Absteckstäbe. Bestimme nach §. 192. Aufl. 1. das Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ congruent dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ etc.

Aufl. 4. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe und des Astrolabiums, oder der Boussole.

Nach §. 192. Aufl. 3., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derselben Bedingung bestimmt wurde.

Aufl. 5. (Fig. 114.) Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe, und des Meßtisches.

Nach §. 192. Aufl. 4., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derselben Bedingung bestimmt wurde.

3) Wenn nur eine Seite des Dreiecks, und die derselben anliegenden Winkel meßbar sind.

Aufl. 6. (Fig. 115.) Vermittelſt der Meßkette, und der Abſteckſtäbe. Nach §. 192. Aufl. 5., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

Aufl. 7. (Fig. 115.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Aſtrolabiums, oder der Bouſſole.
Nach §. 192. Aufl. 7., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

Aufl. 8. (Fig. 115.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Meßtiſches.
Nach §. 192. Aufl. 8., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

4) Wenn nur ein Winkel des Dreiecks zugänglich, und meßbar iſt.

Aufl. 9. (Fig. 117.) Vermittelſt der Meßkette, und der Abſteckſtäbe. Nach §. 192. Aufl. 9., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

Aufl. 10. (Fig. 118.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Winkelkreuzes.
Nach §. 192. Aufl. 10., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

Aufl. 11. (Fig. 121.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Aſtrolabiums, oder der Bouſſole.
Nach §. 192. Aufl. 11., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

Aufl. 12. (Fig. 121.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Meßtiſches.
Nach §. 192. Aufl. 12., wo das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ unter derſelben Bedingung beſtimmt wurde.

5) Wenn weder die Seiten, noch die Winkel des Dreiecks zugänglich und meßbar ſind.

Aufl. 13. (Fig. 125.) Vermittelſt der Meßkette, und der Abſteckſtäbe. Wähle einen Seitenpunkt o, und beſtimme nach §. 192. Aufl. 9. die Seiten $\alpha'\beta' = \alpha\beta$, $\alpha'\gamma' = \alpha\gamma$, $\beta'\gamma' = \beta\gamma$, wodurch offenbar das Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ congruent dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$, und nach Aufl. 1. 2. etc. beſtimmbar wird.

Aufl. 14. (Fig. 125.) Vermittelſt der Meßkette, der Abſteckſtäbe, und des Winkelkreuzes.

Wähle einen Seitenpunkt o, und bestimme nach §. 192. Aufl. 10. in den auf $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$ senkrecht stehenden $o\delta$, $o\varepsilon$, $o\eta$, die Punkte α'', β'', γ'' in solcher Entfernung von o, daß $o\alpha'' = o\alpha$, $o\beta'' = o\beta$, $o\gamma'' = o\gamma$, folglich das Dreieck $\alpha''\beta''\gamma''$ congruent dem Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, und in dieser Lage nach Aufl. 1. 2. meßbar wird.

Aufl. 15. (Fig. 126). Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe, und des Astrolabiums, oder der Bouſſole.

Wähle eine gerade Standlinie von bekannter Länge $\delta\varepsilon = d$, und bestimme nach §. 192. Aufl. 11. die Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ vermittelst der Dreiecke $\alpha\delta\varepsilon$, $\beta\delta\varepsilon$, $\gamma\delta\varepsilon$, etc.

Aufl. 16. (Fig. 126). Vermittelst der Meßkette, der Absteckstäbe, und des Meßtisches.

Nach §. 192. Aufl. 12, analog dem Verfahren in Aufl. 15, wodurch hier das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ in verjüngter Zeichnung auf der Meßtischplatte gefunden wird.

§. 196. Aufg. (Fig. 127.) Die horizontale Projection eines beliebigen Ortsvierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ nach verschiedenen Messungsmethoden vermittelst der obigen Instrumente zu bestimmen.

a) Nach der Umfangs-Methode — Wenn gemessen werden (§. 188. 1. 2. 3):

1) Die vier Seiten des Vierecks, und ein Winkel am Umfange desselben.

1′) a, b, c, d, α; d. h.?

Aufl. 1. (Fig. 127). Durch Berechnung. — Bestimme: — 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, β', δ'' (§. 187. 19. 20) — 2) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke β'', γ, δ'. (§. 187. 22′. 23′. 24′) — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'', γ' (§. 187. 19. 20).

Aufl. 1′. (Fig. 127). Durch Verzeichnung — Construire: — 1) aus a, b, α das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (17. 2′) — 2) aus f, c, d das Dreieck $\beta\gamma\delta$ (§. 17. 1), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ völlig bestimmt ist. — (vergl. §. 20. 1).

1″) a, b, c, d; α'. d. h.?

Aufl. 2. (Fig. 127). Durch Berechnung. — Bestimme: — 1) aus dem Dreieck $\alpha\gamma\delta$ die Stücke e, γ'', δ (§. 187. 16. 17) — 2) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke α'' β, γ'. (§. 187. 22′. 23′. 24′) — 3) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke f, β'', δ'. (§. 187. 19. 20).

Aufl. 2′. (Fig. 127). Durch Verzeichnung. — Construire — 1) aus

a, d, α' das Dreieck $\alpha\gamma\delta$ (§. 17. 2′) — 2) aus b, c, e das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (§. 17. 1), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ völlig bestimmt ist.

2) Drei Seiten des Vierecks, und zwei Winkel am Umfange deſſelben.

2′) a, b, c; α, β; d. h.?

Aufl. 3. (Fig. 127). Durch Berechnung. — Beſtimme — 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, β' δ'' (§. 187. 19. 20). — 2) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'' γ'. (§. 187. 19. 20) — 3) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, γ, δ'. (§. 187. 19. 20).

Aufl. 3′. (Fig. 127). Durch Verzeichnung — Conſtruire — 1) aus a, b, α das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 17. 2′) — 2) aus b, c, β das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (§. 17. 2′), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ beſtimmt iſt — (vergl. §. 20. 2′).

2″) a, b, c; α, γ. d. h.?

Aufl. 4. (Fig. 127). Durch Berechnung — Beſtimme — 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, β' δ'' (§. 187. 19. 20) — 2) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, β'', δ'. (§. 187. 16. 17) — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'' γ'. (§. 187. 19. 20).

Aufl. 4′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung — Conſtruire — 1) aus a, b, α das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 17. 2′) — 2) aus c, f, γ das Dreieck $\beta\gamma\delta$ (§. 17. 2″), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ beſtimmt iſt.

2‴) a, b, c; α, δ d. h.?

Aufl. 5. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Beſtimme: 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, β', δ'' (§. 187. 19. 20). — 2) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, β'', γ. (§. 187. 16. 17). — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'', γ' (§. 187. 19. 20.)

Aufl. 5′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Conſtruire: 1) aus a, b, α das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 17. 2′). — 2) aus f, c, δ' das Dreieck $\beta\gamma\delta$ (§. 17. 2″.), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ beſtimmt iſt (vergl. §. 20. 2‴).

2ᴵᵛ) a, b, c; γ, δ, d. h.?

Aufl. 6. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Denke aus den Winkelſpitzen α, β Senkrechte auf die Seite $\gamma\delta$ gefällt, $\alpha\varkappa$, $\beta\lambda$, und beſtimme $\gamma\delta = d$ aus den Stücken $\delta\varkappa = a \cdot \cos.\ \delta$, $\gamma\lambda = c \cdot \cos.\ \gamma$, $\varkappa\lambda = \sqrt{b^2 - (\alpha\varkappa - \beta\lambda)^2}$, ſo ergiebt ſich:

$$d = a \cdot \cos.\ \delta + c \cdot \cos.\ \gamma + \sqrt{b^2 - (\alpha\varkappa - \beta\lambda)^2}, \text{ oder:}$$

weil $\alpha\varkappa = a \cdot \sin.\delta$, und $\beta\lambda = c \cdot \sin.\gamma$ ist,

$$d = a \cdot \cos.\delta + c \cdot \cos.\gamma + \sqrt{b^2 - (a \cdot \sin.\delta - c \cdot \sin.\gamma)^2},$$

und dadurch die weitere Lösung der Aufgabe nach 1. Aufl. 1.

Aufl. 6′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Am einfachsten durch Construction der vorstehenden trigonometrischen Formel für d, wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ völlig bestimmt ist (vergl. §. 20. 2^{IV}).

2^{V}) a, b, c; γ', δ'', d. h.?

Aufl. 7. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Bestimme: 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, α, β' (§. 187. 16. 17.) — 2) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, β, α'' (§. 187. 16. 17.). — 3) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, β'', δ' (§. 187. 16. 17).

Aufl. 7′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Construire 1) aus a, b, δ'' das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 17. 2′). — 2) Aus b, c, γ' das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (§. 17. 2″.), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt ist.

2^{VI}) a, b, c; α'', β', d. h.?

Aufl. 8. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Bestimme: 1) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, β, γ' (§. 187. 16. 17). — 2) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, α, δ'' (§. 187. 16. 17). — 3) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, γ', δ' (§. 187. 19. 20).

Aufl. 8′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Construire: 1) aus b, c, α'' das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (§. 17. 2″). — 2) aus a, b, β'' das Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 17. 2″.), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt ist.

NB. Die Bildung und Lösung mehrerer hierher gehöriger Aufgaben bleiben der Kürze wegen dem Leser überlassen.

3) Zwei Seiten des Vierecks, und drei Winkel am Umfange desselben.

3′) a, b; α, β, γ, folglich auch δ, d. h.?

Aufl. 9. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Bestimme: 1) aus dem Dreieck $\delta\alpha\beta$ die Stücke f, β', δ'' (§. 187. 19. 20). — 2) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke c, d (§. 187. 13. 14). — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'', γ' (§. 187. 19. 20).

Aufl. 9′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Construire: 1) aus a, b, α das Dreieck $\delta\alpha\beta$. — 2) aus c, f, β'' das Dreieck $\beta\gamma\delta$ (§. 17. 2′.), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt ist.

3″) a, c; α, β, γ, folglich auch δ, d. h.?

Aufl. 10. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Denke aus α, β Senkrechte $\alpha\varkappa$, $\beta\lambda$ auf $\gamma\delta$ gefällt, und aus β zwischen den Senkrechten eine

eine Gerade $\beta\mu$ parallel folglich auch gleich dem Stücke $\lambda\varkappa$, ſo ergiebt ſich leicht:

$b^2=(\alpha\varkappa-\beta\lambda)^2+(\beta\mu)^2$ (1)., und $b^2=(\beta\mu)^2.\sec.^2(\beta-\gamma)$(2)., alſo

$(\alpha\varkappa-\beta\lambda)^2+(\beta\mu)^2=(\beta\mu)^2.\sec.^2(\beta-\gamma)$ oder

weil $\alpha\varkappa=a\sin.\delta.$; $\beta\lambda=c.\sin.\gamma$; $\beta\mu=d-a.\cos.\delta-c\cos.\gamma.$

iſt, $(a.\sin.\delta-c.\sin.\gamma)^2+(d-a.\cos.\delta-c.\cos.\gamma)^2=$

$(d-a.\cos.\delta-c.\cos.\gamma)^2.\sec.^2(\beta-\gamma)$ (3).,

woraus ſich durch gehörige Entwickelung d finden läßt, nämlich:

$d=a.\cos.\delta+c.\cos.\gamma+(a.\sin.d-c.\sin.\gamma).\cotg.(\beta-\gamma)$ (4).

und die weitere Löſung der Aufgabe nach 2. Aufl. 1.

Aufl. 10′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Conſtruire d nach der Formel (4)., wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ völlig geometriſch beſtimmt iſt (vergl. §. 20. 3′).

3′′) a, b; α, γ', γ'' das ſo genannte Potenotſche Problem.

Aufl. 11. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Setze $360-\alpha-\gamma=\varphi$, alſo $\delta=\varphi-\beta$, ſo ergeben ſich nach §. 187. leicht folgende Proportionen:

$a:e=\sin.\gamma'':\sin.(\varphi-\beta)$; $b:e=\sin.\gamma':\sin.\beta$, aus welchen man findet:

$a.\sin.(\varphi-\beta).\operatorname{cosec}.\gamma''=b.\sin.\beta.\operatorname{cosec}.\gamma'$, oder:

wenn $\sin.(\varphi-\beta)$ nach Sinus und Coſinus der Winkel φ und β dargeſtellt wird,

$a.\operatorname{cosc}.\gamma''.\sin.\varphi.\cos.\beta-a.\operatorname{cosc}.\gamma''\cos.\varphi\sin.\beta=$

$b.\sin.\beta.\operatorname{cosc}.\gamma'$, oder:

wenn ſämmtliche Glieder der Gleichung durch $\sin.\beta$ dividirt werden,

$a.\operatorname{cosc}.\gamma''.\sin.\varphi.\cotg.\beta-a.\operatorname{cosc}.\gamma''.\cos.\varphi=b.\operatorname{cosc}.\gamma'$,

woraus folgt:

$\cotg.\beta=\cotg.\varphi+b.\operatorname{cosc}.\gamma'.\operatorname{cosc}.\varphi.\sin.\gamma''$

und dadurch die weitere Löſung der Aufgabe nach Aufl. 9.

Aufl. 11′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Conſtruire das verjüngte Dreieck $\delta\alpha\beta$ (§. 183. §. 17. 2′.), ſodann über $\delta\alpha=a$, $\alpha\beta=b$, als Sehnen, Kreisabſchnitte, deren Peripheriewinkel gleich γ'', γ' ſind (§. 16. 8.), wodurch der vierte Winkelpunkt des Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ im Durchſchnittspunkt γ beider Abſchnittsbogen gefunden wird, wie dies leicht erhellt.

Die Aufgabe würde unbeſtimmt, wenn die Proportion $a:b=\sin.\gamma'':\sin.\gamma'$ ſtatt fände, in welchem Falle die Abſchnittsbogen

zu einer und derſelben Kreislinie gehörten, und deßhalb ſich nicht ſchneiden könnten ꝛc.

3^{IV}) a, c; α, β'', δ', d. h.?

Aufl. 12. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Beſtimme: 1) aus dem Dreieck $\beta\gamma\delta$ die Stücke d, f, γ (§. 187. 13. 14). — 2) aus dem Dreieck $\alpha\beta\delta$ die Stücke b, β', δ'' (§. 187. 16. 17). — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die Stücke e, α'', γ' (§. 187. 19. 20).

Aufl. 12′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Conſtruire: 1) aus c, β'', δ' das Dreieck $\beta\gamma\delta$ (§. 17. 5). — 2) aus a, f, α das Dreieck $\alpha\beta\delta$ (§. 17. 2′)., wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ beſtimmt iſt.

NB. Mehrere hierher gehörige Aufgaben werden, der Kürze wegen, außer Betracht gelaſſen.

4) Eine Seite des Vierecks, und vier Winkel am Umfange deſſelben.

4′) a; α', α'', δ', δ'', folglich auch β', γ''.

Aufl. 13. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Beſtimme: 1) aus dem Dreieck $\alpha\beta\delta$ die Stücke b, f. — 2) aus dem Dreieck $\alpha\gamma\delta$ die Stücke d, e (§. 187. 13. 14). — 3) aus dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ alles Uebrige (§. 187. 19. 20).

Aufl. 13′. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung. — Conſtruire: 1) aus a, α, δ'' das Dreieck $\alpha\beta\delta$. — 2) aus a, δ, α' das Dreieck $\alpha\gamma\delta$ (§. 17. 5.), wodurch das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ beſtimmt iſt.

4″) c; α',α'', δ', δ'', folglich auch β', γ''.

Aufl. 14. (Fig. 127.) Durch Berechnung. — Von ſämmtlichen Winkeln des Vierecks ſind nur β'', γ' unbekannt. Aus der Berechnung des einen ergiebt ſich offenbar auch der Werth des andern, und dadurch die weitere Löſung der Aufgabe nach 4′. Aufl. 13., weil die Seite c, mit allen anliegenden Winkeln gegeben wäre. Die Winkel β'', γ' laſſen ſich aber leicht aus folgender allgemein gültigen Gleichung ableiten:

$$\sin.\alpha' \cdot \sin.\beta' \cdot \sin.\gamma' \cdot \sin.\delta' = \sin.\alpha'' \cdot \sin.\beta'' \cdot \sin.\gamma'' \cdot \sin.\delta'',$$

oder, wenn zur Abkürzung geſetzt wird:

$$\sin.\alpha' \cdot \sin.\beta' \cdot \sin.\delta' = m,$$

$$\sin.\alpha'' \cdot \sin.\gamma'' \cdot \sin.\delta'' = n,$$

$$m \cdot \sin.\gamma' = n \cdot \sin.\beta'', \text{ oder, weil } \gamma' = \alpha' + \delta'' - \beta'' \text{ iſt,}$$

$$m \cdot \sin.(\alpha' + \delta'' - \beta'') = n \cdot \sin.\beta''.$$

Entwickele $\sin.(\alpha' + \delta'' - \beta'')$ nach sin. und cos. von $(\alpha' + \delta'')$, β'', ſo entſteht:

m. sin. $(\alpha' + \delta'')$. cos. β'' — m. cos. $(\alpha' + \delta'')$. sin. β'' = sin. β'' oder: wenn sämmtliche Glieder der Gleichung durch sin. β''. sin. $(\alpha' + \delta'')$ dividirt werden,

$$m \cdot \text{cotg.}\, \beta'' - m \cdot \text{cogt.}\, (\alpha' + \delta'') = n \cdot \text{cosc.}\, (\alpha' + \delta'')$$

woraus man mittelst gehöriger leicht verständlicher Umformung findet:

$$\text{cotg.}\, \beta'' = \text{cotg.}(\alpha' + \delta'') + \frac{n}{m} \cdot \text{cosc.}\, (\alpha' + \delta'');$$ also auch:

arc. cotg. $\beta'' = \beta''$, und $\gamma' = \alpha' + \delta'' - \beta''$ wodurch dann die weitere Lösung der Aufgabe auf 4'. Aufl. 13. zurückgeführt ist, wie dies bereits oben bemerkt worden.

Aufl. 14'. (Fig. 127.) Durch Verzeichnung, und zwar am leichtesten nach 4'. Aufl. 13', wenn zuvor die Winkel β'', γ' nach Aufl. 14 bestimmt werden. Will man alle Rechnung vermeiden, und die bekannten Winkel α', β', δ', α'', γ'', δ'' in geometrischer Größe (§. 184.) zur Bestimmung des β'' benutzen, so läßt sich dieser Zweck, ohne Schwierigkeit mittelst Construction der für cotg. β'' gefundenen Formel erreichen, wenn man derselben nachstehende Gestalt m. cotg. $\beta'' = m$. cotg. $(\alpha' + \delta'') + n$. cosc. $(\alpha' + \delta'')$ giebt, und eine Gerade von beliebiger Länge als Einheitshalbmesser gebraucht — die wirkliche Ausführung dieser höchst einfachen Construction bleibt der Figuren-Ersparung wegen dem mündlichen Vortrage überlassen.

NB. Mehrere hierher gehörige Aufgaben sind der Kürze wegen weggelassen worden.

b) Nach der Einpunkts-Methode. (ein selbst gemachtes Wort),

Aufl. 15. Wähle im Umfange des Vierecks, oder innerhalb, oder außerhalb desselben einen Punkt, verbinde diesen durch Gerade mit den Winkelspitzen (§. 188. 1.); miß die Geraden, so wie die von ihnen am gewählten Punkte gebildeten Winkel (§. 188. 2. 3.), und bestimme aus den dadurch entstandenen Dreiecken die Projektion des Vierecks nach §. 195. Aufl. 3. 4. 5. — Wird der Punkt in einer Winkelspitze des Vierecks angenommen, so entspringt die möglichst kleinste Anzahl von Bestimmungsdreiecken, also auch die einfachste Lösung der Aufgabe nach der Einpunkts-Methode.

c) Nach der Coordinaten-Methode.

Aufl. 16. Wähle eine gerade Linie als Abscissenaxe, oder wenn es nöthig sein sollte, mehrere von bekannter Lage gegeneinander, und

bestimme die Seiten und Diagonalen des Vierecks durch die Coordinaten seiner Winkelspitzen nach §. 193. Aufl. 1. §. 195. Aufl. 2. — Die Lösung der Aufgabe nach dieser Methode wird am einfachsten, wenn man die Abscissenaxe auf einer Seite des Vierecks, oder auf einer Diagonale desselben wählt, weil dadurch zwei Ordinaten zu Null werden.

d) Nach der Standlinien-Methode (ein selbst gewählter Ausdruck). Aufl. 17. Wähle eine gerade Standlinie von bekannter Länge, oder wenn es nöthig sein sollte mehrere von bestimmter Lage gegen einander, und ermittele die Projection des Vierecks nach §. 193. Aufl. 2. §. 195. Aufl. 15. 16. — Die Lösung der Aufgabe nach dieser Methode wird am einfachsten wenn eine Seite des Vierecks zur Standlienie ausgewählt wird.

e) Nach der Triangulirungs-Methode. Aufl. 18. Zerlege das Viereck, besonders wenn es sehr groß ist, in eine beliebige Anzahl zusammenhängender und aus einander bestimmbarer Dreiecke, miß die zu diesem Endzwecke nöthigen Linien und Winkel (§. 188.) des Dreiecknetzes, und ermittele dadurch die gesuchte Projection des Vierecks nach §. 195.

NB. Daß man in der Praxis die hier angegebenen Messungs-Methoden zur Projetionsbestimmung einer Feldfigur oft auf eine zweckmäßige Art verbindet bedarf wohl kaum der Anführuug. Wohl aber verdient es bemerkt zu werden, daß man meistens der Verificirung wegen mehr Stücke einer Feldfigur mißt als zu ihrer analytischen und geometrischen Bestimmung nothwendig sind.

§. 197. Aufg. Mündliche Auseinandersetzung über die Anwendung der vorstehenden Vermessungs-, Berechnungs-, und Verzeichnungs-Methoden zur horizontalen Projectionsbestimmung beliebiger Erdflächenstücke — wie Wiesen-, Feld- und Wald-Bezirke; Fluß-Gebiete, Weg-Erstreckungen; Dorf- und Stadt-Anlagen, nebst deren Gemarkungen etc.

NB. S. Tob. Mayers prakt. Geometr. Thl. II. Seite 493 bis 611, und Thl. III. Seite 1 bis 134, wo man auch von Seite 354 bis 374 die etwa hierher gehörigen Bemerkungen über Anlegung und Leitung der Landstraßen findet.

b) Inhalts-Bestimmung derselben.

§. 198. Aufg. Den Flächen-Inhalt J eines Felddreiecks zu bestimmen.

Aufl. Bestimme die horizontale Projection des Dreiecks (§. 195.), und berechne den Inhalt J entweder aus Grundlinien-, und Höhen-Messungen (§. 190. §. 188. 2. oder §. 6. 2'. §. 2. 2.) nach bekannter Methode, oder aus Seiten- und Winkelmessungen. (§. 188. 2. 3. §. 184. oder §. 2. 2. 5) nach §. 187. Formel. 15. 18. 21. 25.

§. 199. Aufg. (Fig. 128. 129). Den Flächen-Inhalt J eines Feldpolygons zu bestimmen.

a) Nach der Dreiecks-Methode.

Aufl. 1. Zerlege das Polygon, oder dessen Projections-Verjüngung in Dreiecke; bestimme die Inhalte dieser Dreiecke nach §. 198., und summire die erhaltenen Resultate — Berechnet man die Dreiecks-Inhalte aus Grundlinien und Höhen, so ist es vortheilhaft für je zwei aneinanderliegende Dreiecke eine gemeinschaftliche Seite als Grundlinie zu wählen.

b) Nach der Trapez-Methode.

Aufl. 2. Zerlege das Polygon, oder dessen Projections-Verjüngung durch parallele Gerade in Trapez-, und Dreiecksformen (§. 191. oder §. 6. 1.); errichte zwischen den Grenzparallelen eine senkrechte (§. 189. oder §. 4. 1.); bestimme die Inhalte der Zerlegungsfiguren nach bekannter Methode, und summire die gefundenen Rechnungsresultate — Zur Richtbestimmung der aus den Winkelspitzen der Figur zu ziehenden Parallelen pflegt man der Vereinfachung wegen eine Umfangsseite zu wählen.

Fig. 128, Zieht man dieser Vorschrift gemäß im Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$ die Geraden $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\delta\delta'$ parallel der Seite $\alpha\eta$, errichtet dann zwischen den Grenzparallelen $\alpha\eta$, $\delta'\delta'$ die Senkrechte $\pi\delta$, welche die Parallelen $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\varepsilon\varepsilon'$ in den Punkten x', x''', x'' schneidet; mißt endlich die Linie:

$\alpha\eta = a$, $\beta\beta' = a_1$, $\varepsilon\varepsilon' = a_2$, $\gamma\gamma' = a_3$, und:

$\pi x' = h_1$, $\pi x'' = h_2$, $\pi x''' = h_3$, $\pi\delta = h_4$, wodurch:

$x'x'' = h_2 - h_1$, $x''x''' = h_3 - h_2$, $x'''\delta = h_4 - h_3$ wird,

so ergiebt sich für den Inhalt J des Sechsecks offenbar folgende Bestimmungsformel:

$2.J = (a + a_1).h_1 + (a_1 + a_2).(h_2 - h_1) + (a_2 + a_3).(h_3 - h_2) + (a_3 + 0).(h_4 - h_3).(1).$ d. h. ? oder:

wenn die angedeuteten Multiplicationen ausgeführt, und die Productglieder anders geordnet werden,

$2.J = (a - a_2).h_1 + (a_1 - a_3).h_2 + (a_2 - 0).h_3 + (a_3 + 0)h_4.(1')$

zwei Ausdrücke, welche durch Einführung der Null so gestaltet sind, daß sich aus ihnen das allgemeine Bildungsgesetz für die Inhaltsformel eines jeden n-ecks leicht erkennen läßt.

c) Nach der Coordinaten-Methode.

Aufl. 3. Lege durch das Polygon, oder durch dessen Projectionsverjüngung, eine Gerade als Abscissenaxe; fälle auf diese, aus sämmtlichen Winkelspitzen der Figur, senkrechte Ordinaten (§. 190. oder §. 6. 2'); miß diese Abscissen und Ordinaten (§. 188. 2. oder §. 2. 2), und bestimme mittelst der Resultate wegen der Zerlegungsfiguren (Trapez und Dreiecke) den Inhalt J des Polygons dadurch: daß die Differenz je zweier Folgeabscissen (nach der Ordnungsfolge der Winkelspitzen so genannt) mit der halben Summe der zugehörigen Ordinaten multiplicirt, und aus sämmtlichen Producten ein allgemeiner Summenausdruck gebildet wird; bei welchem Verfahren natürlich die Qualität der Coordination zu berücksichtigen ist.

Dieser Vorschrift gemäß würde man durch das Achteck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta\vartheta\varkappa$. Fig. 129. die Gerade $00'$ als Abscissenaxe legen, sodann die Coordinaten der Winkelspitzen α, β, γ, etc. bestimmen:

$o\alpha' = a', o\beta' = b', o\gamma' = c', o\delta' = d', o\varepsilon' = e', o\eta' = f', o\vartheta' = g', o\varkappa' = k';$

$\alpha\alpha' = a'', \beta\beta' = b'', \gamma\gamma' = c'', \delta\delta' = d'', \varepsilon\varepsilon' = e'', \eta\eta' = f'', \vartheta\vartheta' = g'', \varkappa\varkappa' = k''$

und aus diesen Resultaten folgende Inhaltsformel bilden:

$2J = (b' - a')(b'' + a'') + (c' - b')(c'' + b'') + (d' - c')(d'' + c'') + (e' - d')(e'' + d'') + (f' - e')(f'' + e'') + (g' - f')(g'' + f'') + (k' - g')(k'' + g'') + (a' - k')(a'' + k'').(2)$

wobei zu beachten ist, daß nach Anlage der Figur 129. die Ordinaten e'', f'', g'', k'' negativ zu nehmen sind etc. Führt man die angedeutete Multiplication aus, und giebt den Productgliedern eine andere Ordnung, so erhält die Formel (2) nachstehende Gestalt:

$2J = a'.(k'' - b'') + b'(a'' - c'') + c'(b'' - d'') + d'(c'' - e'') + e'(d'' - f'') + f'(e'' - g'') + g'(f'' - k'') + k'(g'' - a'').(2').d.h$?
deren Gesetzmäßigkeit unmittelbar in die Augen springt.

§. 200. Aufg. Den Flächen-Inhalt einer krumm- oder gemischtlinig begrenzten Feldfigur zu bestimmen.

a) Nach der Polygon-Methode.

Aufl. 1. Wähle in der krummlinigen Begrenzung der Feldfigur so viele nahe an einander liegende Punkte, daß die geraden Verbindungslinien derselben, ohne bedeutende Abweichung von der Wahrheit, als Umfangslinien der Figur betrachtet werden können, und bestimme den Inhalt nach §. 199. Aufl. 1. 2. 3.

b) Nach der Abwägungs-Methode.

Aufl. 2. Verzeichne die Projections-Verjüngung der Feldfigur nach einem beliebigen Maßstabe (§. 197.), so wie auch eine zweite Figur etwa ein Quadrat von bekanntem Inhalte nach demselben Maßstabe. Lege beide Figuren auf Staniolblättchen; schneide sie darin aus, und bestimme die Gewichte beider Staniolfiguren vermittelst einer guten Wage; so läßt sich, wenn das Gewicht des Quadrats durch g, das der Feldfiguren-Projection durch k, der Inhalt des erstern durch m, der der letztern durch J bezeichnet wird, dieses J leicht aus folgender Proportion finden $J : m = k : g$, woraus sich ergiebt $J = \frac{mk}{g}$. d. h?

NB. Daß man sich dieser Abwägungs-Methode auch zur Inhaltsbestimmung gradlinig begrenzter Feldfiguren bedienen könne, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

---

c) Theilung derselben nach bestimmten Verhältnissen.

§. 201. Aufg. Jedes Felddreieck, nach bestimmter Lage der Theilungslinien, in n Theile zu theilen, die sich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Sowohl arithmetisch als geometrisch vermittelst der Berechnungs- und Constructions-Formeln in §. 144. — §. 146. — §. 148. — §. 150. — §. 153. — §. 155. — §. 157. — §. 159. — §. 162.

§. 165. — §. 166. — §. 167., wenn zuvor die Projectionsbeſtimmung, und Inhaltsberechnung nach §. 195. und 198. ausgeführt wird.

§. 202. Aufg. Jedes Feldpolygon, nach beſtimmter Lage der Theilungslinien, in n Theile zu theilen, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Sowohl arithmetiſch als geometriſch vermittelſt der Berechnungs- und Conſtructionsformeln in — §. 145. — §. 147. — §. 149. — §. 151. — §. 152. — §. 154. — §. 156. — §. 158. — §. 160. — §. 161. — §. 163. — §. 164. — §. 165. — §. 166. — §. 167., wenn zuvor die Projections- und Inhaltsbeſtimmung nach §. 196. §. 197. und §. 199. ausgeführt wird.

§. 203. Aufg. Jede krumm-, oder gemiſchtlinig begrenzte Feldfigur, nach beſtimmter Lage der Theilungslinien, in n Theile zu theilen, die ſich zu einander verhalten wie $p' : p'' : p''' :$ etc.

Aufl. Nach §. 202., wenn die Feldfigur als Polygon betrachtet, und nach §. 197. und §. 200. beſtimmt wird.

NB. Feldvertheilungen rückſichtlich der ſogenannten Bonität des Bodens werden hier abſichtlich außer Betracht gelaſſen.

Zweiter Abſchnitt.

Verticale Projectionsbeſtimmungen §. 178. 3.

A) Abſoluter Höhen. §. 178. 3.

§. 204. Poſtulat. Mündliche Belehrung über den Gebrauch des mit einer Kippregel verbundenen Aſtrolabiums, oder Meßtiſches (§. 185. 20. 21.) zur verticalen Projectionsbeſtimmung beliebiger Winkel des Feldes — ſowohl in ſenkrechten, als in ſchiefgeneigten Ebenen.

§. 205. Aufg. (Fig. 130 — 136.) Die abſolute Höhe $o\alpha = h$ eines erhabenen Gegenſtandes z. B. eines Baumes, Thurmes, Berges etc. durch mittelbare Meſſung zu beſtimmen.

I. Wenn ſich in einer verticalen Ebene der zu beſtimmenden Höhe eine gerade Standlinie wählen läßt.

1) Wenn die unter I. bedingte Standlinie in der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

a) Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſchneidenden Standlinie zugänglich iſt.

Aufl. 1. (Fig. 130.) Vermittelſt eines ſenkrechten Stabes, nach §. 188. Errichte in einem beliebigen Punkte β der horizontalen Standlinie xo einen ſenkrechten Stab $\beta\beta'$ (§. 185. 6.); beſtimme in xo den Eintreffpunkt ν der Viſirlinie $\alpha\beta'$; miß die Längen $\beta\beta' = a$, $o\nu = e$, $\beta\nu = g$; ſo ergiebt ſich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $o\alpha\nu$, $\beta\beta'\nu$ die Verticale $o\alpha = h = \frac{ae}{g}$. (1).

Aufl. 2. (Fig. 130.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc. Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta'$ in einem beliebigen Punkte β der Horizontalen xo ſenkrecht auf; miß den Verticalwinkel $\alpha\beta'o' = \phi$

(§. 204.), und die Geraden $\beta\beta' = oo' = a$, $o\beta = o'\beta' = b$ (§. 188.); ſo ergiebt ſich aus dem Dreieck $\alpha\beta'o'$ die Verticale $\alpha o' = h - a = b \cdot tg\ \varphi$ (§. 187. 5.) folglich $h = b \cdot tg \cdot \varphi + a$. (2).

b) Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſchneidenden Standlinie nicht zugänglich iſt.

Aufl. 3. (Fig. 130.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta' = \gamma\gamma' = oo' = a$ in zwei Punkten β, γ der Horizontalen xo ſenkrecht auf; miß die Verticalwinkel $\alpha\beta'o' = \varphi$, $\alpha\gamma'o' = \psi$ (§. 204.), ſo wie die Gerade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = c$ (§. 188.), und beſtimme — aus dem Dreieck $\alpha\beta'\gamma'$ die Viſirlinie $\alpha\beta' = m$ (§. 187. 14.) — aus dem Dreieck $\alpha\beta'o'$ die Verticale $o'\alpha = h - a$ (§. 187. 1.) — Man findet, weil der Winkel $\beta'\alpha\gamma' = \varphi - \psi$ iſt, die Viſirlinie: $\alpha\beta' = m = \frac{c. \sin. \psi}{\sin. (\varphi - \psi)}$, ſodann die Verticale $\alpha o' = h - a = m. \sin. \varphi$, oder wenn der Werth für m ſubſtituirt wird:

$$h - a = \frac{c. \sin. \varphi \sin. \psi}{\sin. (\varphi - \psi)}, \text{ folglich } h = \frac{c. \sin. \varphi. \sin. \psi}{\sin. (\varphi - \psi)} + a. \ (3)$$

2) Wenn die unter I. bedingte Standlinie nicht in der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

2') Wenn die Standlinie über der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

a') Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſchneidenden Standlinie zugänglich iſt.

Aufl. 4. (Fig. 131.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta' = oo' = a$ in einem von o aus zugänglichen Punkte β der Standlinie xo ſenkrecht auf; miß die Winkel $\delta\beta'\alpha = \varphi$, $\delta\beta'o' = \chi$ (§. 204.), ferner die Gerade $o\beta = o'\beta' = b$ (§. 188.), und beſtimme die Verticale $\alpha o' = h - a$ aus dem Dreieck $\alpha\beta'o'$, ſo ergiebt ſich nach §. 187. 13., weil der Winkel $o'\alpha\beta' = R - \varphi$ iſt,

$$h - a = \frac{b. \sin. (\varphi + \chi)}{\cos. \varphi}, \text{ folglich } h = \frac{b. \sin. (\varphi + \chi)}{\cos. \varphi} + a. \ (4)$$

NB. Die Formel (4) wird zur Formel (2) in Aufl. 2, wenn $\chi = 0$ wird, d. h?

b') Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſchneidenden Standlinie nicht zugänglich iſt.

Aufl. 5. (Fig. 131). Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta' = \gamma\gamma' = oo' = a$ in zwei von einander zugänglichen Punkten β, γ der Standlinie αo ſenkrecht auf; miß die Winkel $\delta\beta'\alpha = \varphi$, $\delta\beta' o' = \varepsilon\gamma' o' = \chi$, $\varepsilon\gamma'\alpha = \psi$ (§. 204.), ferner die Gerade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = c$ (§. 188.) und beſtimme: — 1) Aus dem Dreieck $\alpha\beta'\gamma'$ die Viſirlinie $\alpha\beta' = m$ — 2) aus dem Dreieck $\alpha\beta' o'$ die Verticale $\alpha o' = h - a$. Nach §. 187. 14. ergiebt ſich:

1) für $\alpha\beta'$, weil der Winkel $\beta'\alpha\gamma' = \varphi - \psi$ iſt, die Formel $m = \frac{c.\ \sin.\ (\psi + \chi)}{\sin.\ (\varphi - \psi)}$.

2) für $\alpha o'$, weil der Winkel $\delta o'\beta' = R - \chi$ iſt, die Formel $h - a = \frac{m.\ \sin.\ (\varphi + \chi)}{\cos.\ \chi}$, oder:

wenn für m der vorſtehende Werth ſubſtituirt wird:

$h - a = \frac{c.\ \sin.\ (\varphi + \chi).\ \sin.\ (\psi + \chi)}{\sin.\ (\varphi - \psi).\ \cos.\ \chi}$, folglich

$h = \frac{c.\ \sin.\ (\varphi + \chi).\ \sin.\ (\psi + \chi)}{\sin.\ (\varphi - \psi).\ \cos.\ \chi} + a.$ (5).

NB. Die Formel (5) wird zur Formel (3) in Aufl. 3, wenn $\chi = o$ wird. b. h?

2'') Wenn die Standlinie unter der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

a'') Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſchneidenden Standlinie zugänglich iſt.

Aufl. 6. (Fig. 132.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Aufſtellung des Aſtrolabiums, Winkel- und Längen-Meſſungen, nebſt trigonometriſchen Berechnungsarten wie in Aufl. 4. Man findet, weil der Winkel $\alpha\beta' o'$ nicht wie oben $\varphi + \chi$ ſondern $= \varphi - \chi$ iſt,

$h - a = \frac{b.\ \sin.\ (\varphi - \chi)}{\cos.\ \varphi}$, alſo $h = \frac{b.\ \sin.\ (\varphi - \chi)}{\cos.\ \varphi} + a.$ (6).

eine Formel, welche ſich von der Formel (4) in Aufl. 4. blos durch das ſubtractive χ unterſcheidet.

b'') Wenn der Fußpunkt der Höhe auf der ihn ſcheidenden Standlinie nicht zugänglich iſt.

Aufl. 7. (Fig. 132.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Aufſtellung des Aſtrolabiums, Winkel- und Längen-Meſſungen nebſt Berechnungsweiſen für die Viſirlinie $\alpha\beta' = m$, und die Verticale $\alpha o' = h - a$ wie in Aufl. 5. Es ergiebt ſich, weil hier der Winkel $\alpha\gamma'\beta' = \psi - \chi$, der Winkel $\alpha\beta' o' = \varphi - \chi$, alles Uebrige aber wie unter Aufl, 5. iſt,

$$\alpha o' = h - a = \frac{c.\ \sin.\ (\varphi - \chi).\ \sin.\ (\psi - \chi)}{\sin\ (\varphi - \psi).\ \cos.\ \chi} \text{ folglich}$$

$$h = \frac{c.\ \sin.\ (\varphi - \chi).\ \sin.\ (\psi - \chi)}{\sin.\ (\varphi - \psi).\ \cos.\ \chi} + a. \quad (7)$$

ein Ausdruck, welcher mit Formel (5) in Aufl. 5 bis auf das ſubtractive χ völlig übereinſtimmt.

II. Wenn ſich keine gerade Standlinie in einer verticalen Ebene der zu beſtimmenden Höhe wählen läßt.

1. Wenn die gewählte Standlinie in der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

Aufl. 8. (Fig. 133.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc.

Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta' = \gamma\gamma'$ in zwei von einander zugänglichen Punkten β, γ der Horizontalen $\beta\gamma$ ſenkrecht auf; miß den Elevationswinkel $\alpha\beta' o' = \varphi$, den Depreſſionswinkel $o'\beta' o = \psi$ (§. 204), die Horizontalwinkel $o'\beta'\gamma' = o\beta\gamma = \mu$, $o'\gamma'\beta' = o\gamma\beta = \nu$ (§. 188. 3.), ferner die Gerade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = c$ (§. 188. 2.); und berechne 1) aus dem Dreieck $o\beta\gamma$ die Horizontale $o'\beta' = o\beta$. 2) aus den Dreiecken $\alpha\beta' o'$, $o'\beta' o$ die Verticalen $\alpha o'$, $o' o$, ſo ergiebt ſich auch die geſuchte $\alpha o = \alpha o' + o o' = h$. Man erhält:

$o'\beta' = o\beta = b = \frac{c.\ \sin.\ \nu.}{\sin.\ (\mu + \nu)}$. (§. 187. 13. 14.), ferner:

$\alpha o' = b.\ tg.\ \varphi$, und $o' o = b\ tg.\ \psi$. (§. 187. 5.), folglich:

$\alpha o = h = \alpha o' + o' o = b\ (tg.\ \varphi + tg.\ \psi)$, oder:

weil $b = \frac{c.\ \sin.\ \nu}{\sin.\ (\mu + \nu)}$, und $tg.\ \varphi + tg.\ \psi = \frac{\sin.\ (\varphi + \psi)}{\cos.\ \varphi\ \cos.\ \psi}$ iſt,

$$\alpha o = h = \frac{c.\ \sin.\ \nu.\ \sin.\ (\varphi + \psi)}{\sin.\ (\mu + \nu).\ \cos.\ \varphi.\ \cos.\ \psi}. \quad (8).$$

2) Wenn die gewählte Standlinie nicht in der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

2') Wenn die Standlinie über der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

Aufl. 9. (Fig. 134.) Vermittelst des Aſtrolabiums etc.

Es ſei $\beta\gamma$ die über der horizontalen Ebene $\delta o\varepsilon$ liegende Standlinie, und $\delta\varepsilon$ die ihr in dieſer Ebene zugehörige Projection. Stelle das Aſtrolabium $\beta\beta' = \gamma\gamma'$ in den Endpunkten β, γ ſenkrecht auf; miß den Elevationswinkel $\alpha\beta' o' = \phi$, den Depreſſionswinkel $o'\beta' o = \psi$ (§. 204.) die Horizontalprojectionen der Winkel $o\beta'\gamma'$, $o\gamma'\beta'$, d. h. $o\delta\varepsilon = \mu$, $o\varepsilon\delta = \nu$ (§. 188. 3.); ferner die in ſchiefer Ebene liegende Grade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = c$. nebſt ihrem Erhebungswinkel $\gamma'\beta'\sigma = \omega$; und berechne 1) aus dem Dreieck $\gamma'\beta'\sigma$ die Horizontale $\delta\varepsilon = \beta'\sigma = c'$, 2) aus dem Dreieck $o\delta\varepsilon$ die Horizontale $o\delta = o'\beta' = d$, 3) aus den Dreiecken $\alpha\beta' o'$, $o'\beta' o$ die Verticalen $\alpha o'$, $o' o$, woraus ſich dann die geſuchte $\alpha o = \alpha o' + o' o = h$ ergiebt. Man erhält dieſen Vorſchriften gemäß:

$\delta\varepsilon = c' = c \cdot \cos. \omega$. (§. 187. 1.); ferner:

$$\alpha\delta = o'\beta' = d = \frac{c' \sin. \nu}{\sin. (\mu + \nu)} = \frac{c. \cos. \omega. \sin. \nu}{\sin. (\mu + \nu)}$$ (§. 187. 13. 14.); ſodann

$\alpha o' = o'\beta'. \text{tg.}\, \phi = d. \text{tg.}\, \phi$; $o' o = o'\beta'. \text{tg.}\, \psi = d. \text{tg.}\, \psi$. (§. 187. 5.), folglich:

$\alpha o = h = \alpha o' + o' o = d\,(\text{tg.}\, \phi + \text{tg.}\, \psi)$, oder:

weil $d = \frac{c. \cos. \omega. \sin. \nu}{\sin. (\mu + \nu)}$, und $\text{tg.}\, \phi + \text{tg.}\, \psi = \frac{\sin. (\phi + \psi)}{\cos. \phi. \cos. \psi}$ iſt

$$\alpha o = h = \frac{c. \cos. \omega. \sin. \nu. \sin. (\phi + \psi).}{\sin. (\mu + \nu). \cos. \phi. \cos. \psi} \quad (9)$$

Aus den obigen Beſtimmungen der Geraden $o\delta = o'\beta' = d$, und der Winkel $o'\beta' o = \psi$, $\gamma'\beta'\sigma = \omega$ ergeben ſich auch die verticalen Abſtände $\delta\beta'$, $\varepsilon\gamma'$ der Viſirungspunkte β', γ' von ihren Projectionspunkten δ, ε in der Horizontal-Ebene $\delta o\varepsilon$; nämlich:

$\delta\beta' = o' o = o'\beta'. \text{tg.}\, \psi$. (§. 187. 5.), und

$\varepsilon\gamma' = \delta\beta' + \sigma\gamma' = \delta\beta' + c. \sin. \omega$. (§. 187. 1), oder:

weil $o'\beta' = d = \frac{c. \cos. \omega. \sin. \nu}{(\sin. \mu + \nu)}$, und $\delta\beta' = d. \text{tg.}\, \psi$ iſt,

$\delta\beta' = \text{d. tg. } \psi = \frac{\text{c. cos. } \omega \text{. sin. } \nu \text{. tg. } \psi}{\text{sin. } (\mu + \nu)}$. (9′) und:

$\varepsilon\gamma' = \text{d. tg. } \psi + \text{c. sin. } \omega = \frac{\text{c. cos. } \omega \text{ sin. } \nu \text{. tg. } \psi}{\text{sin. } (\mu + \nu)} + \text{c. sin. } \omega$. (9″).

Für $\omega = o$ werden die Formeln (9′), (9″) identiſch, und (9) geht in (8) der Aufl. 8. über.

2″) Wenn die Standlinie unter der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

Aufl. 10. (Fig. 135.) Vermittelſt des Aſtrolabiums etc., nach Aufl. 9:

Es ſei $\beta\gamma$ die unter der horizontalen Ebene $\delta o\varepsilon$ liegende Standlinie, und $\delta\varepsilon$ die ihr zugehörige Projection in dieſer Ebene. Miß, wie in Aufl. 9, die Winkel $\alpha\beta' o' = \phi$, $o'\beta' o = \psi$, $o\delta\varepsilon = \mu$, $o\varepsilon\delta = \nu$, $\gamma'\beta'\sigma = \omega$, die in ſchiefer Ebene liegende Gerade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = \text{c}$; und berechne nach den dortigen Methoden die Horizontalen $\delta\varepsilon = \beta'\sigma = \text{c}'$, $o\delta = o'\beta' = \text{d}$, und die Verticalen $\alpha o'$, $o' o$; ſo ergiebt ſich:

$\delta\varepsilon = \text{c}' = \text{c. cos. } \omega$; $o\delta = o'\beta' = \text{d} = \frac{\text{c. cos. } \omega \text{. sin. } \nu}{\text{sin. } (\mu + \nu)}$, und

$\alpha o' = \text{d. tg. } \phi$; $o o' = \text{d. tg. } \psi$ wie unter Aufl. 9, folglich:

$\alpha o = \alpha o' - o' o = \text{d } (\text{tg. } \phi - \text{tg. } \psi)$, oder:

wenn der Werth für d ſubſtituirt, und tg. ϕ — tg. ψ mit $\frac{\text{sin. } (\phi - \psi)}{\text{cos. } \phi \text{. cos. } \psi}$ vertauſcht wird,

$\alpha o = \text{h} = \frac{\text{c. cos. } \omega \text{. sin. } \nu \text{. sin. } (\phi - \psi)}{\text{sin. } (\mu + \nu) \text{. cos. } \phi \text{. cos. } \psi}$. (10)

Eine Formel, welche mit der Formel (9) bis auf das ſubtractive ψ, und ω übereinſtimmt. Das negative ω bewirkt aber keine Qualitätsänderung des cos. ω, weil cos. $(-\omega)$ = cos. ω iſt, wie dies aus der Trigonometrie erhellt.

Wegen der negativen oder ſubtractiven Winkel ψ, ω verwandeln ſich die Formel (9′), (9″), betreffend die Verticalabſtände der Punkte β', γ' von ihren Projectionen δ, ε in der Horizontal-Ebene $\delta o\varepsilon$, in folgende:

$\delta\beta' = \text{d. tg. } (-\psi) = -\text{d. tg. } \psi = -\frac{\text{c. cos. } \omega \text{. sin. } \nu \text{. tg. } \psi}{\text{sin. } (\mu + \nu)}$ (10′), und:

$\varepsilon\gamma' = \text{d. tg. } (-\psi) + \text{c. sin. } (-\omega) = -\frac{\text{c. cos. } \omega \text{. sin. } \nu \text{. tg. } \psi}{\text{sin. } (\mu + \nu)} - \text{c. sin. } \omega$. (10″).

durch welche negative Werthe hier aber die Tiefenabstände der Visirungspunkte β', γ' von der Horizontal-Ebene $\delta o \varepsilon$ bezeichnet werden, so wie die obigen positiven Werthe für $\delta\beta'$, $\varepsilon\gamma'$ in Aufl. 9. Höhenabstände zu erkennen gaben.

2''') Wenn die Standlinie theils über, theils unter der horizontalen Ebene des Fußpunktes der Höhe liegt.

Aufl. 4. (Fig. 136.) Vermittelst des Astrolabiums etc., nach Aufl. 9. Bezeichnet man die gewählte Standlinie durch $\beta\gamma$, ihre Projection in der Horizontal-Ebene $\delta o \varepsilon$ durch $\delta\varepsilon$; mißt, wie in Aufl. 9, die Winkel $\alpha\beta' o' = \phi$, $o'\beta' o = \psi$, $o\delta\varepsilon = \mu$, $o\varepsilon\delta = \nu$, $\gamma'\beta'\sigma = \omega$, ferner die schiefgeneigte Gerade $\beta\gamma = \beta'\gamma' = c$, und berechnet nach obigen Methoden 1) die Horizontalen $\delta\varepsilon = \beta'\sigma = c'$, $o\delta = o'\beta' = d$. 2) die Verticalen $\alpha o'$, $o' o$; so ergiebt sich

$$c' = c.\cos.(-\omega) = c.\cos.\omega; d = \frac{c'.\sin.\nu}{\sin.(\mu+\nu)} = \frac{c.\cos.\omega.\sin.\nu}{\sin.(\mu+\nu)}; \text{und,}$$

$\alpha o' = d.\operatorname{tg}.\phi$; $o' o = d.\operatorname{tg}.\psi$; folglich:

$$\alpha o = h = \alpha o' + o' o = d\,(\operatorname{tg}.\phi + \operatorname{tg}.\psi) = \frac{c.\cos.\omega.\sin.\nu.\sin.(\phi+\psi)}{\sin.(\mu+\nu).\cos.\phi.\cos.\psi}. \quad (11).$$

ferner der Höhenabstand des Punktes β' von δ. d. h.:

$$\delta\beta' = o o' = d.\operatorname{tg}.\psi = \frac{c.\cos.\omega.\sin.\nu.\operatorname{tg}.\psi}{\sin.(\mu+\nu)}. \quad (11')$$

und der Tiefenabstand des Punktes γ' von ε. d. h:

$$\varepsilon\gamma' = \varepsilon\sigma - \sigma\gamma' = \delta\beta' + c.\sin.(-\omega) = \frac{c.\cos.\omega.\sin.\nu.\operatorname{tg}.\psi}{\sin.(\mu+\nu)} - c.\sin.\omega. \quad (11'')$$

aus welchen drei Formeln erhellt, daß sie bis auf das negative Glied c. sin. ω in (11'') mit (9), (9'), (9'') in Aufl. 9. völlig identisch sind; wie dies auch nothwendig ist, weil die hier gemessenen Bestimmungs-Elemente ϕ, ψ, μ, ν, ω, c sich nur durch die negative Lage des Winkels ω von der dort gemessenen unterscheiden, und deshalb keine andere Qualitätsänderung in den Formeln (9), (9'), (9'') bewirken, als die eben angeführte.

NB. Vorstehenden Bemerkungen gemäß dürfen Aufl. 9. 10. 11. als Eine betrachtet werden, zu welcher die Formeln (9), (9'), (9'') als Normalformeln gehören, aus denen (10), (10'), (10''), oder (11), (11'), (11'' als bloße Modificationen entspringen, je nachdem entweder die Winkel ψ

und ω, oder nur der Winkel ω negativ gesetzt werden. — Daß unter den neun verschiedenen Lösungsmethoden der obigen Aufgabe die Aufl. 9. 10. 11. diejenige ist, welche den Charakter der größten Allgemeinheit in sich trägt, und deshalb in der Praxis, besonders bei Bergmessungen, am häufigsten Anwendung findet, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

B. Relativer Höhen. (§. 178. 3.)

§. 206. Nach §. 178. 3. versteht man unter der absoluten Höhe eines erhabenen Gegenstandes diejenige Verticale, welche aus dem höchsten Punkte desselben auf die horizontale Fläche seiner Basis gefällt ist; unter der relativen Höhe dagegen den verticalen Abstand jenes höchsten Punktes von einer beliebigen Horizontalfläche. — Die Differenz der relativen Höhenabstände zweier Ortspunkte von einer und derselben Horizontalfläche heißt deren Gefäll, und zwar scheinbares oder wahres Gefäll, je nachdem die als Basis gewählte Horizontalfläche ein scheinbarer, oder ein wahrer Horizont auf der Erdoberfläche ist. (§. 178. 2.)

§. 207. Aufg. (Fig. 137). Das wahre Gefäll zwischen einem Ortspunkte α und einem in seinem scheinbaren Horizonte liegenden Punkte β zu bestimmen.

Aufl. Es sei α ein Punkt der Erdoberfläche, $\alpha\sigma$ eine Gerade im scheinbaren Horizonte des α; ferner β ein Punkt der $\alpha\sigma$ (etwa der Gipfel eines entfernten Berges), γ der Mittelpunkt der Erde, und $\alpha\beta\gamma$ eine durch α, β, γ gelegte Vertical-Ebene, durch welche die Oberfläche der Erde im Bogen $\alpha\varepsilon\delta$ geschnitten wird. Die Lösung der Aufgabe kann entweder vermittelst des Halbmessers $\gamma\alpha = \gamma\delta = r$ und des Centriwinkels $\alpha\gamma\delta = \varphi$, oder vermittelst jenes Erdhalbmessers r, und der Länge des Bogens $\alpha\varepsilon\delta = e$ bewerkstelligt werden; wobei, ohne merkliche Abweichung von der Wahrheit $r = 19619050$ Pariser Fuß zu setzen ist.

1) Aus r und φ ergiebt sich nach §. 187. 4. 5.:
$\gamma\beta = \alpha\gamma.\ \sec.\ \varphi$, oder $\gamma\delta + \delta\beta = \alpha\gamma.\ \sec.\ \varphi$; oder, wenn
$\gamma\delta = \gamma\alpha = r$, $\delta\beta = d$ gesetzt wird,
$r + d = r.\ \sec.\ \varphi$, folglich $d = r\ (\sec.\ \varphi - 1)$, und:
$\beta = \alpha b = \gamma\alpha.\ \mathrm{tg}.\ \varphi = r.\ \mathrm{tg}.\ \varphi$.

2) Aus r und der gemessenen Länge des Bogens $\alpha\delta = e$ findet man nach §. 184. 3. Aufl. 3. (4'):

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{e}{2r} \text{ also } \varphi = 2.\,\text{arc.}\,(\log.\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \log. e - \log. 2r.),$$

wodurch dann d, und b wie vorher gefunden werden können. — Meistens kann jedoch $\alpha\delta = \alpha\beta = \alpha\delta = e$ gesetzt werden (§. 178. 2.), unter welcher Voraussetzung für d folgende Bestimmungsproportion entsteht: $d : c = e : (2r + e)$, oder, weil e gegen 2r sehr klein ist, $d : e = e : 2r$, so daß also $d = \frac{e^2}{2r}$ wird.

NB. Setzt man in der Formel $r + d = r \sec.\varphi$ das d bekannt, und entwickelt den Centriwinkel φ aus: $\sec.\varphi = \frac{r+d}{r}$ oder $\cos.\varphi = \frac{r}{r+d}$ also $\varphi = \text{arc}\,[\log.\cos.\varphi = \log r - \log.(r+d)]$ so ergiebt sich daraus das Grundmaß des wahren Horizontalbogens $\alpha\delta = \varphi$ der Erde, den man vom Punkte β aus übersehen könnte, wenn die Refraction der Lichtstrahlen unberücksichtigt bliebe. Wollte man den Bogen $\alpha\delta$ nach geographischen Meilen ausdrücken, von denen 15 auf einen Grad gehen, so müßte man φ im Theilen des Grades nach §. 184. darstellen, und das Resultat mit 15 multipliciren, wie dies unmittelbar einleuchtet.

§. 208. Aufg. (Fig. 138). Das wahre Gefäll zweier zugänglicher Ortspunkte vermittelst der Nivellirungswerkzeuge (§. 185. 9. 10. 15.) zu bestimmen.

1) Wenn beide Ortspunkte, wie A und B, aus einem mittlern Punkte ihrer horizontalen Entfernung sichtbar sind.

Aufl. 1. Stelle in den Ortspunkten A und B die Nivellirlatten mit ihren Zielscheiben; in m, dem mittlern Punkte der horizontalen Entfernung A B, die Kanal- oder die Queckſilberwage senkrecht auf. Richte die Zielscheiben auf die Eintreffpunkte α, β der horizontalen Visirlinie $\alpha\beta$ ein, und bestimme die Lattenhöhen $A\alpha = a$, $B\beta = b$ dieser eingerichteten Zielscheiben, so ergiebt sich das verlangte Gefäll zwischen A und B durch die Gleichung $G = b - a$, und die dazu gehörige horizontale Entfernung $AB = e$ nach §. 188. 2.

2) Wenn beide Ortspunkte, wie A und D, von keinem Punkte ihrer Entfernung zugleich sichtbar sind.

Aufl. 2. Wähle in der örtlichen Entfernungslinie der Punkte A und D, zwei oder mehrere Zwischenpunkte, wie B, C, von solcher Lage, wie sie unter 1 bedingt wurde; bestimme sodann das Gefäll je zweier

Folgepunkte nach Aufl. 1. und ſummire die einzelnen Gefälle, ſo wird dieſe Summe der obigen Forderung Genüge leiſten. Dieſer Vorſchrift gemäß würde man in Fig. 138. beſtimmen:

1) aus $A\alpha = a$, $B\beta = b$, das Gefäll zwiſchen A und B, nehmlich $g = b - a$.

2) aus $B\beta' = b'$, $C\gamma = c$, das Gefäll zwiſchen B und C, nehmlich $g' = c - b'$.

3) aus $C\gamma' = c'$, $D\delta = d$. Das Gefäll zwiſchen C und D, nehmlich $g'' = d - c'$,

woraus ſich dann als Gefäll zwiſchen A und D ergäbe:

$$G = g + g' + g'' = b + c + d - a - b' - c'.$$

eine Gleichung, deren allgemeines Bildungsgeſetz zu deutlich in die Augen ſpringt, als daß es nöthig wäre, eine Worterklärung beizufügen.

NB. Daß man ſich dieſer Methode zur Profilbeſtimmung bergiger Gegenden mit mehr Vortheil bedient als der weitläuftigen Staffelmeſſung, leuchtet ein.

§. 209. Aufg. Die wahre Entfernung zweier Punkte von beliebiger Lage vermittelſt des Schalls zu beſtimmen.

Aufl. Nach §. 185. 16. zu erläutern.

NB. Um den Anhang nicht übermäßig zu vergrößern, laſſe ich die hieher gehörige Theorie der Höhemeſſungen vermittelſt des Barometers, die bei aller Gedrängtheit des Vortrags doch wenigſtens einen Bogen füllen würde, für diesmal unerörtert, werde aber bei einer zweiten Ueberarbeitung des Werks nicht ermangeln das Verſäumte nachzuholen.

Vergleichungs-Tabellen

A — E

zum S. 182. gehörig.

Tabelle A.

(zu §. 182. C. a. gehörig.)

Vergleichung verſchiedener landesgebräuchlicher Fußlängen mit der Länge des Preuß. Duodecimalfußes (§. 182. A. a.).

Namen der verſchiedenen Fuße.	Preuß. Fuß. dd.	Logarithmen.
Altonaer Fuß	0,9235966.	0,9654823 — 1.
Amſterdamer Fuß	0,9018903.	0,9551537 — 1.
Augsburger Fuß	0,9437216.	0,9748440 — 1.
Baſeler Fuß	0,9501904.	0,9778107 — 1.
Baierſcher Fuß	0,9300653.	0,9685135 — 1.
Berner Fuß	0,9343779.	0,9705225 — 1.
Böhmiſcher Fuß	0,9444404.	0,9751746 — 1.
Brabanter Fuß	0,9099403.	0,9590129 — 1.
Braunſchweiger Fuß	0,9092215.	0,9586697 — 1.
Bremer Fuß	0,9214403.	0,9644672 — 1.
Brüſſeler Fuß	0,9271903.	0,9671688 — 1.
Darmſtädter Fuß	0,9171278.	0,9624299 — 1.
Dresdner Fuß	0,9005965.	0,9545302 — 1.
Emdener Fuß	0,9307841.	0,9688490 — 1.
Frankfurter Fuß (am Main) . . .	0,9067778.	0,9575009 — 1.
Genfer Fuß	1,5546610.	0,1916357.
Gothaer Fuß	0,9164091.	0,9620894 — 1.
Griechiſcher (olympiſcher) Fuß . . .	0,9832530.	0,9926653 — 1.
Hamburger Fuß	0,9128153.	0,9603829 — 1.
Hanöverſcher Fuß	0,9307841.	0,9688490 — 1.
Heidelberger Fuß	0,8876590.	0,9482462 — 1.
Holſteiner Fuß	0,9509092.	0,9781436 — 1.
Kalenberger Fuß	0,9336591.	0,9701884 — 1.
Karlsruher Fuß	0,9271903.	0,9671688 — 1.
Londner Fuß	0,9712498.	0,9873310 — 1.
Lübecker Fuß	0,9271903.	0,9671688 — 1.

Namen der verschiedenen Fuße.	Preuß. Fuß dd.	Logarithmen.
Lüttticher Fuß	0,9164091.	0,9620894 — 1.
Mähriſcher Fuß	1,0644720.	0,0271343.
Manheimer Fuß	0,9250341.	0,9661578 — 1.
Mainzer Fuß	0,9595341.	0,9820605 — 1.
Mecklenburger Fuß	0,9271903.	0,9671688 — 1.
Münchener Fuß	0,9300653.	0,9685134 — 1.
Nürnberger Fuß	0,9681159.	0,9859274 — 1.
Oldenburger Fuß	0,9437216.	0,9748440 — 1.
Osnabrücker Fuß	0,8898152.	0,9492999 — 1.
Pariſer Fuß	1,0350032.	0,0149404.
Altrömiſcher Fuß (pes)	0,9391216.	0,9727219 — 1.
Neurömiſcher Fuß (palmo)	0,7118019.	0,8523592 — 1.
Ruſſiſcher Fuß	1,7149427.	0,2342497.
Schwediſcher Fuß	0,9480602.	0,9768359 — 1.
Stutgarter Fuß	0,9128153.	0,9603829 — 1.
Tyroler Fuß	1,0644720.	0,0271343.
Ulmer Fuß	0,9207216.	0,9641284 — 1.
Warſchauer Fuß	0,9487529.	0,9771531 — 1.
Wiener Fuß	1,0071875.	0,0031404.
Würzburger Fuß	0,9379716.	0,9721897 — 1.
Zürcher Fuß	0,9509092.	0,9781372 — 1.

NB. In vorſtehender Tabelle habe ich die beiden Zahlen-Columnen ſorgfältig berechnet. Die erſte dieſer Columnen iſt durch Reduction der verſchiedenen, nach den zuverläſſigſten Angaben, in Pariſer Linien ausgedrückten Fußlängen auf Preuß. Fußmaß, vermittelſt des aus §. 182. C. a. abzuleitenden Verwandlungsfactors 0,007187522, gebracht worden. Die Logarithmen beziehen ſich auf ſieben Stellen der nebenſtehenden Zahlen.

Tabelle B.

(zu §. 182. C. a. gehörig.)

Ausdruck verschiedener Meilenlängen nach Preußischen Ruthen und Fußen. dd. (§. 182. A. a.)

Namen der Meilen.	Preußische Ruthen.	Fuße.
Arabische Meile	521.	11.
Armenische Meile (Farsang)	1183.	1.
Baiersche große Meile	3400.	=
Baiersche kleine Meile	2083.	4.
Burgundische Meile	1501.	4.
Böhmische Meile	1834.	9.
Chinesische Meile, neue Li	152.	11.
Braunschweigische Meile	2811.	5.
Dänische Meile	2000.	=
Deutsche alte Meile, Rasta	1183.	1.
Deutsche geographische Meile	1971.	9.
Egyptische Meile. Schoenus = 60 egypt. Stadien	1564.	11.
Flandrische Meile	1666.	8.
Französische alte Meile, gallische Leuka = 1, 5 röm.	586.	10.
Französische Lieue	1183.	1.
Französische Seemeile	1478.	9.
Großbritannische, alte brittische = 12 Quarantenae	621.	4.
— — neue englische = 1760 Yards	427.	11.
— — Seemeilen	492.	11.
Hamburgische Meile	2000.	=
Hessische Meile	2620.	=
Holländische Meile	1556.	8.
Irländische Meile	544.	8.
Italienische Meile	492.	11.
Jüdische alte Meile, Sabbatherweg	293.	5.
Litthauische Meile	2377.	6.

Namen der Meilen.	Preußische Ruthen.	Preußische Fuß.
Londner Meile	405.	2.
Niederländische Stunde	1503.	7.
Niederländische Seemeile	1478.	9.
Nürnberger Meile	2250.	"
Oestreichische Meile	3958.	4.
Persische Meile, Farsang	1314.	6.
Polnische Meile	1478.	9.
Portugiesische Meile	1643.	1.
Preußische Meile	2000.	"
Römische Meile	391.	9.
Russische Werste = 1500 Arschinen	283.	6.
Sächsische Meile	2406.	6.
Schottische Meile	593.	3.
Schwedische Meile	2841.	2.
Schweizerische Meile	2224.	"
Spanische Meile = 5000 Varas	1110.	8.
Stadien, olympische = 100 Orgii	49.	3.
Stadien, egyptische	26.	3.
Seestadien, griechische	39.	5.
Türkische Meile, Berri	445.	3.
Türkische Seemeilen	348.	3.
Ungarische Meilen	2218.	11.

NB. Sämmtliche Angaben sind aus Tob. Mayers praktischer Geometrie II. pag. 82. entlehnt, wo statt der Preuß. Ruthen und Fuße rheinländische Fuße gesetzt sind. Nach §. 182. A. a. ist der Preuß. Duodecimal-Fuß gleich dem rheinländischen Fuße; es war daher nur nöthig die dortigen Ausdrücke durch 12 zu dividiren um sie auf Preuß. Ruthen und Fuße zu reduziren.

Tabelle C.

(Zu §. 182. C. b. gehörig.)

Vergleichung mehrerer größerer Feld-Flächenmaße mit der Preuß. Quadratruthe.

Namen der verschiedenen Feld-Flächenmaße.	Preuß. □. Ruthen.
Baierischer Jochart	235,96.
Baseler Jochart	224,69.
Braunschweiger Morgen	176,44.
Calenberger Morgen	185,97.
Churmärkische große Landfläche	400.
Clevischer (Holländischer) Morgen	664,34.
Cüstriner Morgen	484,51.
Culmischer Morgen	407,46.
Danziger Morgen	391,65.
Erfurter Morgen	186,26.
Französischer Arpent légal	360,05.
Hamburger Morgen	937,5.
Hannöverischer Morgen	183,38.
Magdeburger Morgen	180.
Mecklenburger Morgen	152,9.
Neumärkischer großer Landmorgen	533,33.
Nürnberger Morgen, Tagewerk	333,29.
Ostfriesischer Morgen, Dimat	400.
Pommerscher Morgen	440.
Pommersche Hägerhufe	27709,3.
Pommersche Trippelhufe	20782,3.
Pommersche Landhufe	13854,9.
Pommersche Priesterhufe	9236,6.
Pommersche Hackenhufe	6927,4.
Preußischer Morgen	180.
Rheinländischer Morgen	120.

Namen der verschiedenen Feldflächenmaße.	Preuß. □. Ruthen.
Sächsischer Morgen	194,33.
Schlesischer Morgen	394,59.
Wiener Jochart	405,95.
Würtenberger Jochart	400.

NB. Vorstehende Tabelle ist nach den zuverlässigsten Angaben mehrerer Bücher entworfen.

Tabelle D.

(zu §. 182. C. c. gehörig.)

Ausdruck verschiedener landesgebräuchlicher Fruchtmaße nach Preußischen Cubikzollen, und Metzen.

Namen der verschiedenen Fruchtmaße.	Preußische Cubikzolle dd.	Metzen.
Aachner Faß = 6 Kopf	1338,2.	6,97.
Altenburger Scheffel = 16 Metzen	7859,8.	40,9.
Altonaer Scheffel = 4 Himten	5889,6.	30,6.
Augsburger Schaff = 8 Metzen	12719,3.	66,2.
Baseler Sack = 8 Müdden	7211,2.	37,6.
Bayreuther Simmer = 16 Maß	27718,2.	144,4.
Berner Müdde = 48 Imy	8852,1.	46,1.
Braunschweiger Scheffel = 16 Himten . . .	17351,6.	90,4.
Berner Scheffel = 16 Splint	3926.	20,4.
Casseler Viertel = 16 Metzen	7978,4.	41,6.
Coblenzer Malter = 4 Viertel	8923.	46,5.
Cölner Malter = 4 Faß	9060,5.	47,2.
Copenhagener Tonne = 8 Scheffel	7775,6.	40,5.
Danziger Scheffel = 16 Metzen	2709,7.	14,1.
Dresdener Scheffel = 4 Viertel	5861,8.	30,5.
Frankfurter a. M. Malter = 4 Simmer . .	6036.	31,4.
Genfer Sack	4340,7.	22,6.
Gothaer Malter = 2 Scheffel	9852,2.	51,3.
Altgriechischer Medimnos = 1½ Metretes . .	2190,8.	11,4.
Hamburger Scheffel = 2 Faß	5889,6.	30,7.
Hannöverisches Malter = 6 Himten	10404,3.	54,2.
Heidelberger Malter = 4 Simmer	5756,5.	30.
Hildesheimer Malter = 6 Himten	8215,7.	42,8.
Holsteiner Scheffel = 16 Metzen	2208,6.	11,5.
Königsberger Scheffel = 16 Metzen	2874,9.	15.
Alt-Jüdischer Chomer = 10 Ephah. . . .	17969,2.	93,1.
Lauenburger Sack	9561,7.	49,8.

Namen der verschiedenen Fruchtmaße.	Preußische Cubikzoll dd.	Metzen.
Lübecker Scheffel = 4 Faß	1867,1.	9,7.
Manheimer Malter = 4 Simmer	5756,5.	30.
Mainzer Malter = 24 Gescheid	5090,2.	26,5.
Mecklenburger Scheffel = 16 Metzen	2372,7.	12,4.
Münchener Schaff = 6 Metzen	12455,5.	64,9.
Nürnberger Korn-Simmer = 16 Metzen . .	17832,8.	92,9.
Osnabrücker Scheffel = 16 Becher	1625,4.	8,5.
Petersburger Czelwerka	722,9.	3,8.
Polen Corzec	2858,3.	14,9.
Prager Strich = 4 Viertel	5228,8.	27,2.
Preußischer Scheffel = $\frac{1}{24}$ Wispel = $\frac{1}{12}$ Malter = 16 Metzen	3072.	16.
Regensburger Kornmaß = 8 Metzen	14670,7.	76,4.
Rigaer Loof	3642,2.	19.
Altrömischer Modius = $\frac{1}{4}$ Amphora	1494,6.	7,8.
Rostocker Scheffel = 6 Splint	1983,5.	10,3.
Stettiner Scheffel = 16 Metzen	2893,8.	15,1.
Stockholmer Tonne	9213,5.	47,9.
Stuttgarter Scheffel = 8 Simmer	9801,2.	51.
Triester Stara	4141,1.	21,6.
Ulmer Imy = 24 Metzen	12843,5.	66,9.
Venediger Staja	4748,7.	24,7.
Waimarscher Scheffel = 16 Mäßchen	4977,1.	25,9.
Wiener Metze = 4 Viertel	3437,1.	17,9.
Zeller Scheffel = 10 Himten	17384,9.	90,5.
Zürcher Mütt = 16 Vierling	4623,4.	24,1.

NB. Diese Tabelle ist nach Tob. Mayers Angaben (prakt. Geometrie Thl. V. pag. 52.) berechnet. Die dort zur Vergleichung gewählten Pariser Cubikzolle sind von mir durch den, aus §. 182. C. c. leicht abzuleitenden, Verwandlungsfactor 1,1087283 auf Preuß. Cubikzolle reducirt, und dann, durch Division mit 192, in Metzen ausgedrückt worden.

Tabelle E.

(zu §. 182. C. c. gehörig.)

Ausdruck verſchiedener landesgebräuchlicher Flüſſigkeitsmaße nach Preuß. Cubikzollen, und Quartmaßen.

Namen der verſchiedenen Flüſſigkeitsmaße.	Preußiſche Cubikzolle dd.	Quartmaße.
Altonaer Tonne = 32 Stübchen	6479,4.	101,2.
Amſterdamer Anker = 16 Stoop	2159,8.	33,7.
Augsburger Fuder = 768 Maß	60722,8.	948,8.
Baſeler Saum = 120 Pott	8551,6.	133,6.
Bourdeaux Barrique = 100 Pots	11495,3.	179,6.
Braunſchweiger Oxhoft	12107,3.	189,2.
Bremer Ohm = 45 Stübchen	8082,7.	126,3.
Caſſeler Ohm = 80 Maß	9158,1.	143,1.
Cölner Ohm = 104 Maß	8870,9.	138,6.
Copenhagener Anker	2104,4.	32,9.
Dresdener Eimer = 72 Kannen	3831,8.	59,9.
Erfurter Eimer = 144 Nöſel	4031,3.	63.
Frankfurter a. M. Ohm = 80 Maß = 320 Schoppen	8337,6.	130,3.
Genueſiſcher Setier = 24 Quarterons = 48 Pots .	2592,2.	40,5.
Gothaer Kanne = 4 Nöſel	97,6.	1,5.
Altgriechiſcher Amphora = ½ Metretes . . .	821,6.	12,8.
Hamburger, auch Holſteiner Anker = 40 Quartier	2023,4.	31,6.
Hannöverſcher Anker = 40 Quartier	2179,8.	34,1.
Heidelberger Ohm = 48 Maß	6274,3.	98.
Hildesheimer Ohm = 160 Quartiere . . .	8708.	136,1.
Jüdiſches Bath = 6 Hin = 72 Logis . . .	2241,8.	35.
Leipziger Eimer = 63 Kannen	4239,8.	66,2.
Londner Weingallon	211,8.	3,3.
Londner Biergallon	258,3.	4.
Lübecker Ohm = 160 Quartier	8093,7.	126,5.

Namen der verschiedenen Fuße.	Preuß. Fuß dd.	Logarithmen.
Lüttricher Fuß	0,9164091.	0,9620894 — 1.
Mährischer Fuß	1,0644720.	0,0271343.
Manheimer Fuß	0,9250341.	0,9661578 — 1.
Mainzer Fuß	0,9595341.	0,9820605 — 1.
Mecklenburger Fuß	0,9271903.	0,9671688 — 1.
Münchener Fuß	0,9300653.	0,9685134 — 1.
Nürnberger Fuß	0,9681159.	0,9859274 — 1.
Oldenburger Fuß	0,9437216.	0,9748440 — 1.
Osnabrücker Fuß	0,8898152.	0,9492999 — 1.
Pariser Fuß	1,0350032.	0,0149404.
Altrömischer Fuß (pes)	0,9391216.	0,9727219 — 1.
Neurömischer Fuß (palmo)	0,7118019.	0,8523592 — 1.
Russischer Fuß	1,7149427.	0,2342497.
Schwedischer Fuß	0,9480602.	0,9768359 — 1.
Stutgarter Fuß	0,9128153.	0,9603829 — 1.
Tyroler Fuß	1,0644720.	0,0271343.
Ulmer Fuß	0,9207216.	0,9641284 — 1.
Warschauer Fuß	0,9487529.	0,9771531 — 1.
Wiener Fuß	1,0071875.	0,0031404.
Würzburger Fuß	0,9379716.	0,9721897 — 1.
Zürcher Fuß	0,9509092.	0,9781372 — 1.

NB. In vorstehender Tabelle habe ich die beiden Zahlen-Columnen sorgfältig berechnet. Die erste dieser Columnen ist durch Reduction der verschiedenen, nach den zuverlässigsten Angaben, in Pariser Linien ausgedrückten Fußlängen auf Preuß. Fußmaß, vermittelst des aus §. 182. C. a. abzuleitenden Verwandlungsfactors 0,007187522, gebracht worden. Die Logarithmen beziehen sich auf sieben Stellen der nebenstehenden Zahlen.

Tabelle B.

(zu §. 182. C. a. gehörig.)

Ausdruck verſchiedener Meilenlängen nach Preußiſchen Ruthen und Fußen. dd. (§. 182. A. a.)

Namen der Meilen.	Preußiſche Ruthen.	Fuße.
Arabiſche Meile	521.	11.
Armeniſche Meile (Farsang)	1183.	1.
Baierſche große Meile	3400.	=
Baierſche kleine Meile	2083.	4.
Burgundiſche Meile	1501.	4.
Böhmiſche Meile	1834.	9.
Chineſiſche Meile, neue Li	152.	11.
Braunſchweigiſche Meile	2811.	5.
Däniſche Meile	2000.	=
Deutſche alte Meile, Rasta	1183.	1.
Deutſche geographiſche Meile	1971.	9.
Egyptiſche Meile. Schoenus = 60 egypt. Stadien	1564.	11.
Flandriſche Meile	1666.	8.
Franzöſiſche alte Meile, galliſche Leuka = 1, 5 röm.	586.	10.
Franzöſiſche Lieue	1183.	1.
Franzöſiſche Seemeile	1478.	9.
Großbritanniſche, alte brittiſche = 12 Quarantenae	621.	4.
— — neue engliſche = 1760 Yards	427.	11.
— — Seemeilen	492.	11.
Hamburgiſche Meile	2000.	=
Heſſiſche Meile	2620.	=
Holländiſche Meile	1556.	8.
Irländiſche Meile	544.	8.
Italieniſche Meile	492.	11.
Jüdiſche alte Meile, Sabbatherweg	293.	5.
Litthauiſche Meile	2377.	6.

Namen der Meilen.	Preußische Ruthen.	Preußische Fuß.
Londner Meile	405.	2.
Niederländische Stunde	1503.	7.
Niederländische Seemeile	1478.	9.
Nürnberger Meile	2250.	"
Oestreichische Meile	3958.	4.
Persische Meile, Farsang	1314.	6.
Polnische Meile	1478.	9.
Portugiesische Meile	1643.	1.
Preußische Meile	2000.	"
Römische Meile	391.	9.
Russische Werste = 1500 Arschinen	283.	6.
Sächsische Meile	2406.	6.
Schottische Meile	593.	3.
Schwedische Meile	2841.	2.
Schweizerische Meile	2224.	"
Spanische Meile = 5000 Varas	1110.	8.
Stadien, olympische = 100 Orgii	49.	3.
Stadien, egyptische	26.	3.
Seestadien, griechische	39.	5.
Türkische Meile, Berri	445.	3.
Türkische Seemeilen	348.	3.
Ungarische Meilen	2218.	11.

NB. Sämmtliche Angaben sind aus Tob. Mayers praktischer Geometrie II. pag. 82. entlehnt, wo statt der Preuß. Ruthen und Fuße rheinländische Fuße gesetzt sind. Nach §. 182. A. a. ist der Preuß. Duodecimal-Fuß gleich dem rheinländischen Fuße; es war daher nur nöthig die dortigen Ausdrücke durch 12 zu dividiren um sie auf Preuß. Ruthen und Fuße zu reduziren.

Tabelle C.

(Zu §. 182. C. b. gehörig.)

Vergleichung mehrerer größerer Feld-Flächenmaße mit der Preuß. Quadratruthe.

Namen der verschiedenen Feld-Flächenmaße.	Preuß. □. Ruthen.
Baierischer Jochart	235,96.
Baseler Jochart	224,69.
Braunschweiger Morgen	176,44.
Calenberger Morgen	185,97.
Churmärkische große Landfläche	400.
Clevischer (Holländischer) Morgen	664,34.
Cüstriner Morgen	484,51.
Culmischer Morgen	407,46.
Danziger Morgen	391,65.
Erfurter Morgen	186,26.
Französischer Arpent légal	360,05.
Hamburger Morgen	937,5.
Hannöverischer Morgen	183,38.
Magdeburger Morgen	180.
Mecklenburger Morgen	152,9.
Neumärkischer großer Landmorgen	533,33.
Nürnberger Morgen, Tagewerk	333,29.
Ostfriesischer Morgen, Dimat	400.
Pommerscher Morgen	440.
Pommersche Hägerhufe	27709,3.
Pommersche Trippelhufe	20782,3.
Pommersche Landhufe	13854,9.
Pommersche Priesterhufe	9236,6.
Pommersche Hackenhufe	6927,4.
Preußischer Morgen	180.
Rheinländischer Morgen	120.

M
M
R
Ri
O
Pi
Pi
Pi
Pi
Ri
Ri
Mi

Ri
Se
St
Tr
Un
Be

Be
Wi
Wi
Ze
Zi

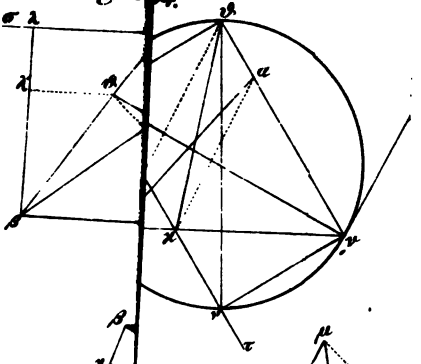


Fig. 60.

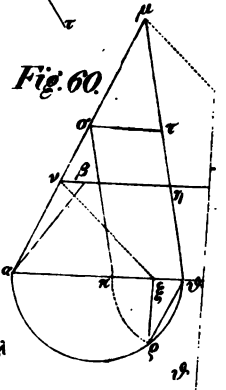


Fig. 62.

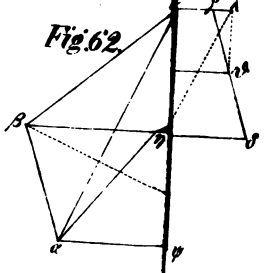
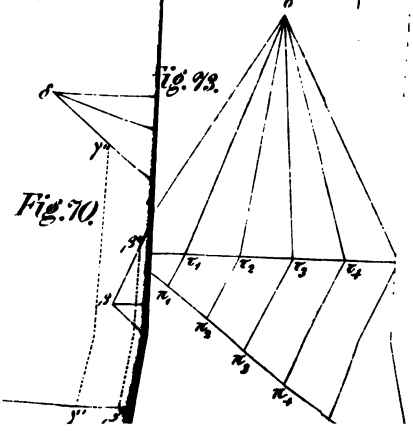
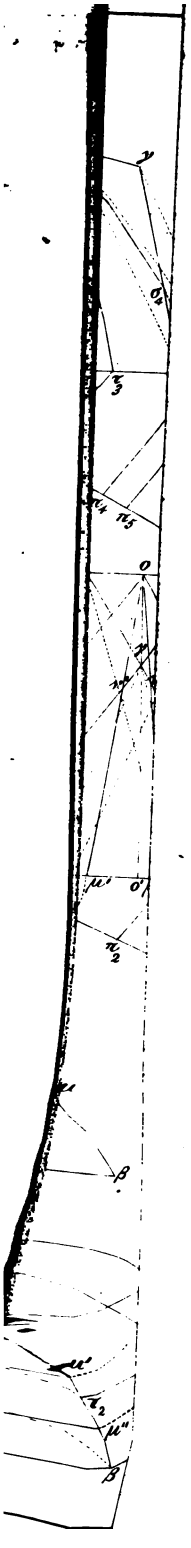


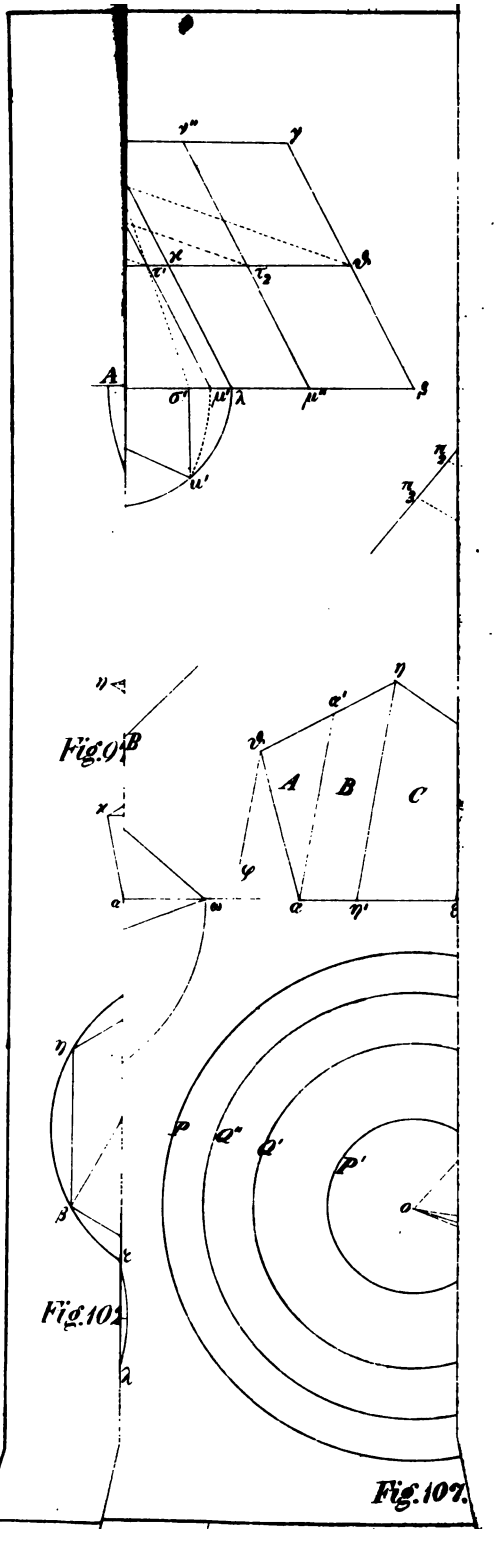
Fig. 67.

Fig. 70.





γ
σ4
π3
π4
π5
o
γ
μ'
o'
π2
β
μ'
π2
μ''
β


A
B
C
Fig.101
Fig.102
Fig.107.

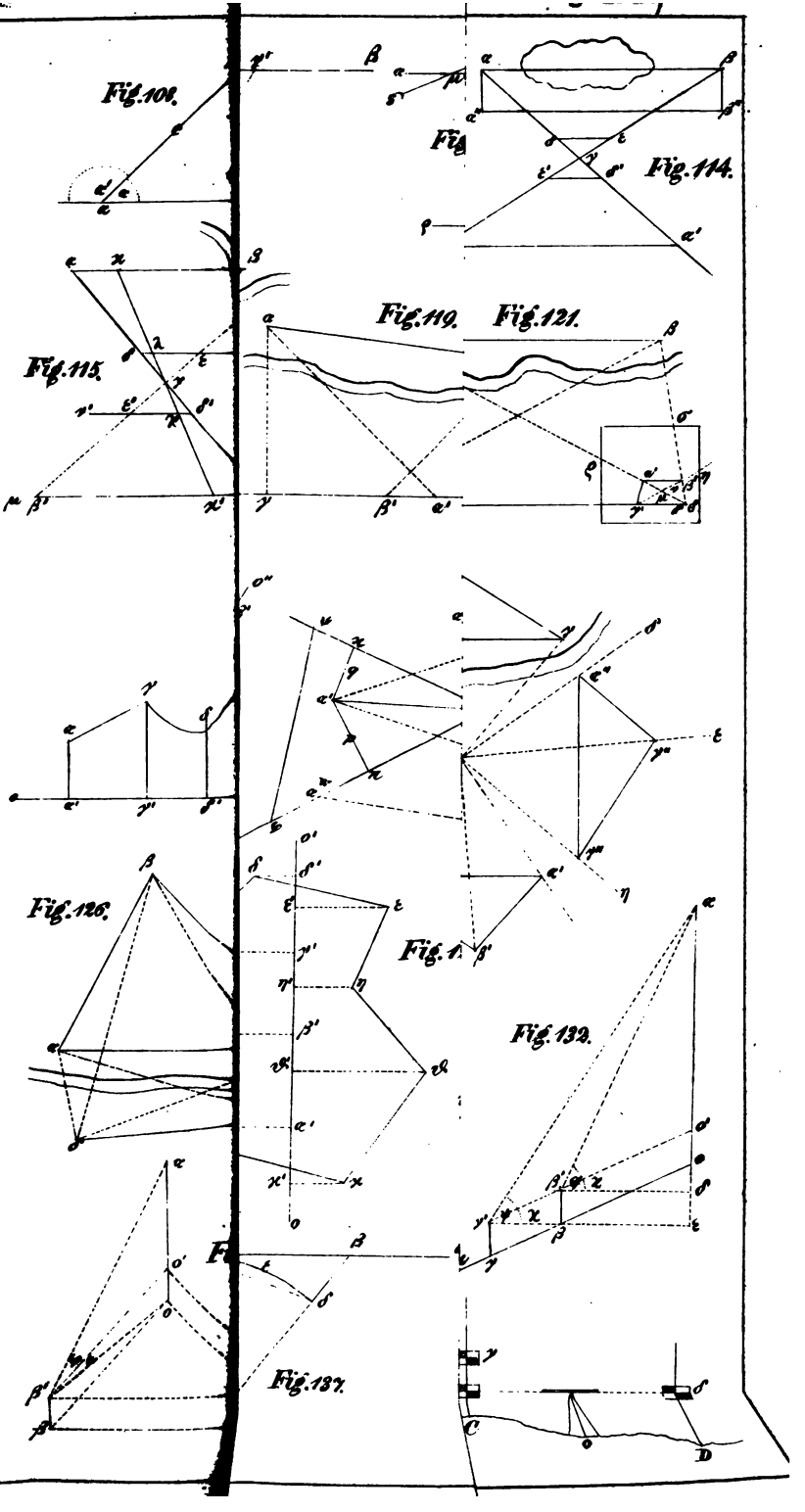
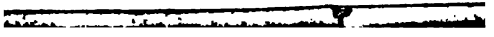
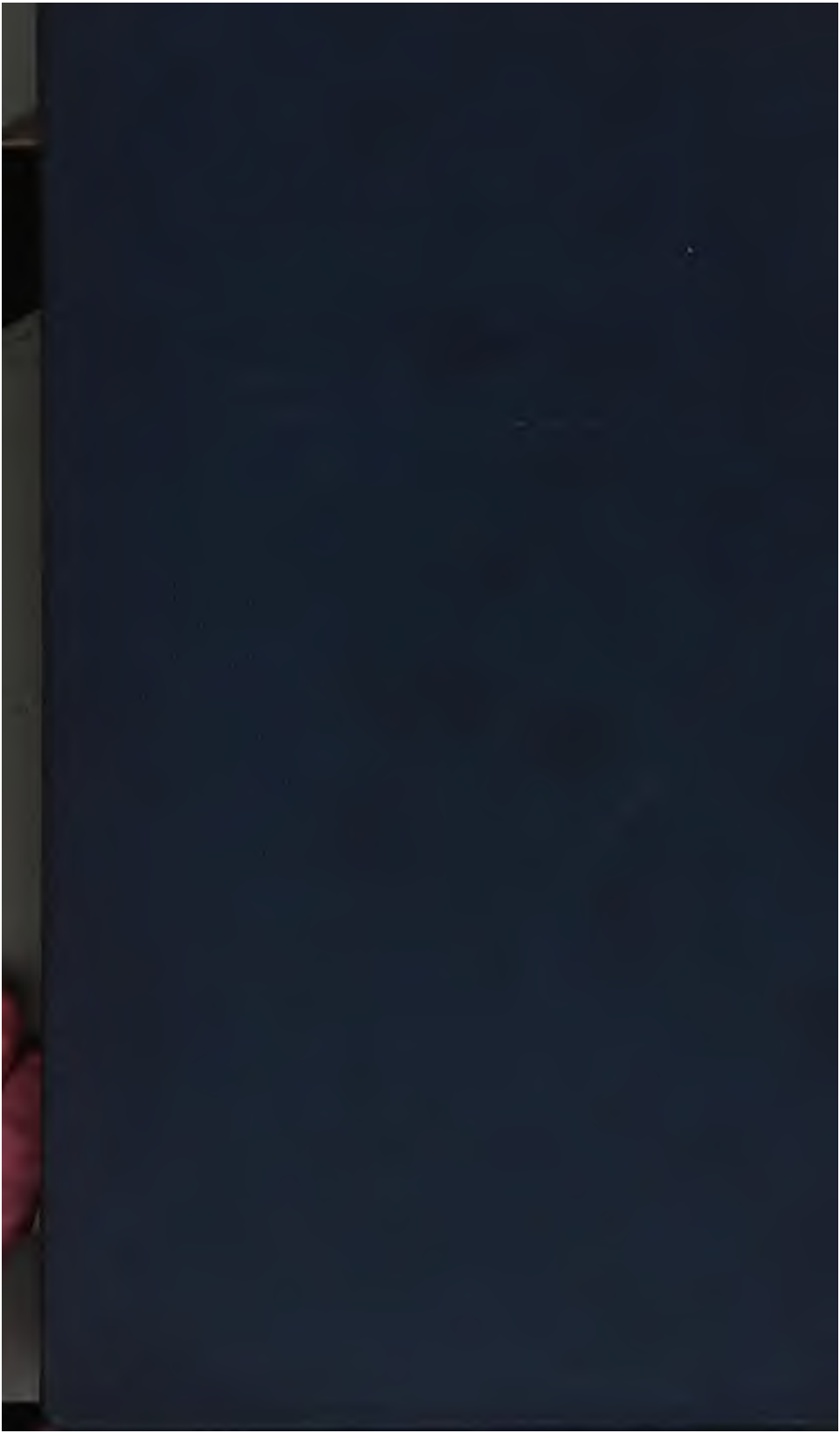


Fig.108.
Fig.114.
Fig.115.
Fig.119.
Fig.121.
Fig.126.
Fig.132.
Fig.137.